

Speranza Matematica Condizionata

Speranza Matematica Condizionata

- Obiettivo:

- ▶ estendere il concetto di probabilità condizionata $P(A|B)$
- ▶ prima a quello di speranza condizionata a un evento $E[X|B]$
- ▶ poi a quello di speranza condizionata a una σ -algebra

$$E[X|\mathcal{G}]$$

$\mathcal{G}$ = informazione

- ▶ in particolare, speranza condizionata a una o più variabili aleatorie

$$E[X|Y_1, \dots, Y_n]$$

- ▶ collegamento con la legge condizionata

Speranza Condizionata a un Evento

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $B \in \mathcal{F}$ con $P(B) > 0$, X va tale che $X \in L^1$ o $X \geq 0$
si definisce

$$E[X|B] = \frac{E[X; B]}{P(B)}$$

dove per convenzione $E[X; B] = \int_B X dP = E[X1_B]$

- ▶ se $A \in \mathcal{F}$, $P(A|B) = E[1_A|B]$
- ▶ $E[X|B] = E_{P_B}[X]$ dove E_{P_B} = speranza sotto la probabilità P_B (p. 51)
↪ $E[\cdot|B]$ ha tutte le proprietà di una speranza (non condizionata)

Speranza Condizionata a un Evento

- Proprietà della speranza condizionata (a un evento)
 - ▶ [Indipendenza] se X indipendente da B , $E[X|B] = E[X]$
 - ▶ [Disintegrabilità (I)] $(B_i)_i \subset \mathcal{F}$ partizione discreta di Ω

$$E[X] = \sum_{i: P(B_i) > 0} P(B_i) E[X|B_i]$$

- ▶ [Disintegrabilità (II)] Y va discreta con determinazioni $y_1, \dots, y_n, \dots$

$$E[X] = \sum_{i: P(Y=y_i) > 0} P(Y = y_i) E[X|Y = y_i]$$

- L'ultima proprietà non può essere utilizzata con Y va continua!

Speranza Condizionata a un Evento

- Esercizio. Lancio di due dadi, X_1, X_2 risultato del primo e secondo dado, $Z = X_1 + X_2$, $U = \min\{X_1, X_2\}$, $V = \max\{X_1, X_2\}$; calcolare

$$E[X_1|Z = i], \quad i = 2, \dots, 12$$

$$E[U|V = i], \quad i = 1, \dots, 6$$

- Esercizio. Una portafoglio di rischi è classificato in *buoni* (20%), *normali* (45%), *mediocri* (35%); il danno atteso per sinistri buoni, normali e mediocri è rispettivamente 500€, 750€ e 1500€. Calcolare il danno atteso per un rischio estratto a caso dal portafoglio.

Speranza Condizionata a un Evento

- Esercizio. Lanci di una moneta. Trovare una formula per il numero atteso di lanci prima di vedere n teste consecutive. (condizionare a $\{Y = 1\}, \dots, \{Y = n\}, \{Y > n\}$ dove Y è il numero di lanci per avere la prima croce)

Speranza Matematica Condizionata

- [Speranza condizionata - Teorema di Kolmogorov] $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $X \in L^1$, $\mathcal{G}$ -sigma algebra con $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$; esiste una v.a. Z su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tale che

① Z è $\mathcal{G}$ -misurabile

② $Z \in L^1$

③ per ogni $A \in \mathcal{G}$

$$E[Z; A] = E[X; A]$$

inoltre Z è **unica**: se Z' è una v.a. che soddisfa (1), (2), (3), allora $Z = Z'$ q.c.

- $Z = E[X|\mathcal{G}]$ è la **speranza condizionata di X all'informazione in $\mathcal{G}$**

Speranza Matematica Condizionata

- Osservazioni

- ▶ [**Caso nonnegativo**] il teorema vale per $X \geq 0$ q.c. con (2) sostituita da
 $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$ q.c.

- ▶ [**Medie parziali (I)**] la proprietà (3) può essere scritta come

$$E[E[X|\mathcal{G}]|A] = E[X|A] \quad \text{per ogni } A \in \mathcal{G} \text{ con } P(A) > 0$$

- ▶ [**Medie parziali (II)**] (3) può essere sostituita da

$$E[E[X|\mathcal{G}]Y] = E[XY]$$

per ogni Y $\mathcal{G}$ -misurabile tale che le speranze esistono

- ▶ [**Probabilità condizionata a una σ -algebra**] per $A \in \mathcal{F}$ si pone

$$P(A|\mathcal{G}) = E[1_A|\mathcal{G}]$$

Speranza Matematica Condizionata

- Osservazioni

- ▶ se $\mathcal{G} = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ allora la notazione è

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X|Y_1, \dots, Y_n]$$

speranza condizionata di X all'osservazione di $Y_1, \dots, Y_n$

- ▶ esiste una funzione $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile tale che (p. 89)

$$E[X|Y_1, \dots, Y_n] = h(Y_1, \dots, Y_n)$$

e si usa la notazione

$$h(y_1, \dots, y_n) = E[X|Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n]$$

curva di regressione di X su $Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata: $X, Y \in L^1$, $\mathcal{G}$ σ -algebra con $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

► [Informazione triviale] $E[X|\{\emptyset, \Omega\}] = E[X]$

► [media della media condizionata=media]

$$E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X] \text{ q.c.}$$

► [Linearità] per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$E[\alpha X + \beta Y|\mathcal{G}] = \alpha E[X|\mathcal{G}] + \beta E[Y|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

► [Monotonia] se $X \leq Y$ q.c. allora

$$E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata: $X, Y \in L^1$, $\mathcal{G}$ σ -algebra con $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

- ▶ [Misurabilità=costanza] se $XY \in L^1$ e Y - $\mathcal{G}$ misurabile

$$E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

e in particolare

$$E[Y|\mathcal{G}] = Y \text{ q.c.}$$

- ▶ [proprietà iterativa] se $\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$

$$E[E[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata
 - ▶ [Disuguaglianza di Jensen] $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa
 X va, $X \in I$ q.c. con $f(X) \in L^1$
allora $X \in L^1$

$$f(E[X|\mathcal{G}]) \leq E[f(X)|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

- ▶ [Contrazione] se $p \geq 1$ e $X \in L^p$ allora $E[X|\mathcal{G}] \in L^p$ e

$$E[|E[X|\mathcal{G}]|^p] \leq E[|X|^p]$$

- ▶ [Indipendenza] se $X \in L^1$ indipendente da $\mathcal{G}$ allora

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X] \text{ q.c.}$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata
 - ▶ [Teorema di Fubini] $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ va in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, con $\mathbf{Y}$ $\mathcal{G}$ -misurabile $g : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile tale che $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^1$

$$E[g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathcal{G}] = E[g(\mathbf{X}, \mathbf{y})|\mathcal{G}]|_{\mathbf{y}=\mathbf{Y}}$$

se $\mathbf{X}$ è anche indipendente da $\mathcal{G}$

$$E[g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathcal{G}] = E[g(\mathbf{X}, \mathbf{y})]|_{\mathbf{y}=\mathbf{Y}}$$

Speranza Matematica Condizionata

- [Geometria in L^p] per $X, Y \in L^p$ ($p \geq 1$) si pone

$$\begin{aligned} \|X\|_p &= E[|X|^p]^{1/p} && \text{lunghezza di } X \\ d_p(X, Y) &= \|X - Y\|_p && \text{distanza tra } X \text{ e } Y \end{aligned}$$

(identificando X con Y se $X = Y$ q.c.)

- [Geometria in L^2] per $X, Y \in L^2$ si pone

$$\langle X, Y \rangle = E[XY] \quad \text{prodotto scalare di } X \text{ e } Y$$

e X è **ortogonale** a Y se $\langle X, Y \rangle = 0$; quando una delle variabili ha media nulla, **ortogonalità** $\equiv$ **non correlazione**

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata: $\mathcal{G}$ σ -algebra con $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $X \in L^2$

- ▶ [Proiezione ortogonale] $E[X|\mathcal{G}]$ è l'unica variabile aleatoria $\mathcal{G}$ -misurabile in L^2 tale che

$$X - E[X|\mathcal{G}] \text{ è ortogonale a } Y$$

per ogni $Y \in L^2$ $\mathcal{G}$ -misurabile

- ▶ [Miglior predittore] $E[X|\mathcal{G}]$ è l'unica soluzione del problema

$$\min_{Y \text{ } \mathcal{G}\text{-misurabile}, Y \in L^2} d_2(X, Y)$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata
 - ▶ [Speranza condizionata a un evento (I)] se $A \neq \emptyset$ è un **atomo** di $\mathcal{G}$ (p. 87) e $P(A) > 0$, allora

$$E[X|\mathcal{G}]1_A = E[X|A]1_A \text{ q.c.}$$

quindi $E[X|\mathcal{G}]$ è costante su A ed uguale a $E[X|A]$

- ▶ [Speranza condizionata a un evento (II)] se $Y_1, \dots, Y_n$ sono v.a. e $y_1, \dots, y_n$ con

$$P(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n) > 0$$

allora su $\{Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n\}$

$$E[X|Y_1, \dots, Y_n] = E[X|Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n]$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata

- ▶ [Speranza condizionata ad una partizione] $\mathbb{P} = (B_i)_i \subset \mathcal{F}$
partizione discreta di Ω , $\mathcal{G} = \sigma(\mathbb{P})$

$$E[X|\mathcal{G}] = \sum_{i: P(B_i) > 0} 1_{B_i} E[X|B_i] \text{ q.c.}$$

mentre su ogni B_i con $P(B_i) = 0$ si può definire $E[X|\mathcal{G}]$ arbitrariamente

Legge e Speranza Condizionata

- Dato un vettore di va

$$\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^T = \underbrace{[X_1, \dots, X_m]}_{=\mathbf{X}'} \underbrace{[X_{m+1}, \dots, X_n]}_{=\mathbf{X}''}^T$$

con pdf congiunta $f_{\mathbf{X}}$ e pdf marginale di $\mathbf{X}''$ $f_{\mathbf{X}''}$;
la **densità condizionata** di $\mathbf{X}'$ a $\mathbf{X}'' = \mathbf{x}''$ è (ponendo
 $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_m)$, $\mathbf{x}'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$)

$$f_{\mathbf{X}'|\mathbf{X}''}(\mathbf{x}'|\mathbf{x}'') = \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{f_{\mathbf{X}''}(\mathbf{x}'')}$$

se $f_{\mathbf{X}''}(\mathbf{x}'') > 0$, 0 altrimenti

Legge e Speranza Condizionata

- Proprietà della distribuzione condizionata

- ▶ per ogni $\mathbf{x}'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ con $f_{\mathbf{X}''}(\mathbf{x}'') > 0$

$$f_{\mathbf{X}'|\mathbf{X}''}(\cdot|\mathbf{x}'')$$

è una pdf

- ▶ $\mathbf{X}', \mathbf{X}''$ indipendenti se e solo se $f_{\mathbf{X}'|\mathbf{X}''} = f_{\mathbf{X}'}$
- ▶ congiunta di $(\mathbf{X}', \mathbf{X}'') \equiv$ marginale di $\mathbf{X}''$ & condizionata $\mathbf{X}'|\mathbf{X}''$

Legge e Speranza Condizionata

- Proprietà della distribuzione condizionata

► [Speranza e legge condizionata] per ogni $\mathbf{x}'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ con $f_{\mathbf{X}''}(\mathbf{x}'') > 0$ e ogni $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile tale che $g(\mathbf{X}') \in L^1$

$$E[g(\mathbf{X}') | \mathbf{X}'' = \mathbf{x}''] = \int_{\mathbb{R}^m} g(\mathbf{x}') f_{\mathbf{X}' | \mathbf{X}''}(\mathbf{x}' | \mathbf{x}'') d\mathbf{x}'$$

- Il caso in cui $\mathbf{X}'$, $\mathbf{X}''$ sono v.a. discrete (o una discreta e una continua) è simile

Speranza Matematica Condizionata

- **Varianza e covarianza condizionata**; per $X, Y \in L^2$

▶ varianza di X condizionata all'informazione in $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}\text{VAR}[X|\mathcal{G}] &= E[(X - E[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}] \\ &= E[X^2|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{G}]^2 \geq 0 \quad \text{q.c.}\end{aligned}$$

▶ covarianza di X e Y condizionata all'informazione in $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}\text{COV}[X, Y|\mathcal{G}] &= E[(X - E[X|\mathcal{G}])(Y - E[Y|\mathcal{G}])|\mathcal{G}] \\ &= E[XY|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{G}]E[Y|\mathcal{G}]\end{aligned}$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della varianza/covarianza condizionata: $X, Y, Z \in L^2$

- ▶ [Simmetria]

$$\text{COV}[X, Y|\mathcal{G}] = \text{COV}[Y, X|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

- ▶ [Varianza e covarianza]

$$\text{VAR}[X|\mathcal{G}] = \text{COV}[X, X|\mathcal{G}]$$

- ▶ [Bilinearità] se A, B, C sono v.a. $\mathcal{G}$ misurabili tali che tutte le speranze sono finite

$$\text{VAR}[AX + B|\mathcal{G}] = A^2 \text{VAR}[X|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

$$\text{COV}[AX + BY + C, Z|\mathcal{G}] = A \text{COV}[X, Z|\mathcal{G}] + B \text{COV}[Y, Z|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

- ▶ [Covarianza “between” e “within”]

$$\text{VAR}[X] = E[\text{VAR}[X|\mathcal{G}]] + \text{VAR}[E[X|\mathcal{G}]] \text{ q.c.}$$

$$\text{COV}[X, Y] = E[\text{COV}[X, Y|\mathcal{G}]] + \text{COV}[E[X|\mathcal{G}], E[Y|\mathcal{G}]] \text{ q.c.}$$

Speranza Matematica Condizionata

- Esercizio. Lanciando una moneta la probabilità di testa è $V \sim U(0, 1)$; si lancia la moneta $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ volte, con N indipendente da V ; sia X il numero di teste; calcolare
 - 1 $E[X|N, V]$
 - 2 $E[X|N]$
 - 3 $E[X|V]$
 - 4 $E[X]$
 - 5 $\text{VAR}[X|N, V]$
 - 6 $\text{VAR}[X|N]$
 - 7 $\text{VAR}[X]$
 - 8 $\text{COV}[X, V|N]$
 - 9 $\text{COV}[X, N|V]$

Speranza Matematica Condizionata

- Esercizio. Si sceglie a caso un punto U_1 nell'intervallo $(0,1)$; per $n \geq 1$, dato U_n , si sceglie a caso un punto U_{n+1} su $(0, U_n)$. Dimostrare che la successione U_n converge q.c. a 0
- Esercizio. [distribuzione composta] Il numero di sinistri in un portafoglio è $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$; l'ammontare dell' i -esimo sinistro è X_i ; le va

$$X_1, \dots, X_n, \dots$$

sono indipendenti e identicamente distribuite (iid) con media μ e varianza σ^2 , e indipendenti da N ; il danno totale è

$$S = X_1 + \dots + X_N$$

Calcolare $E[S]$, $\text{VAR}[S]$, $\text{COV}[S, N]$; esprimere M_S tramite M_X , M_N .

Speranza Matematica Condizionata

- Esercizio. [modello Poisson-Gamma] Il numero di sinistri in un portafoglio è $N|\Lambda \sim \text{Poisson}(\Lambda)$, dove $\Lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$; Λ rappresenta l'eterogeneità della popolazione; trovare la distribuzione di N , $E[N]$, $\text{VAR}[N]$
- Esercizio. [rischio di credito e dipendenza] E_i = l' i -esimo credito è insolvente, $i = 1, \dots, n$;
 $E_1, \dots, E_n$ sono iid condizionatamente a Π , con $P(E_i|\Pi) = \Pi$
 Π ha distribuzione $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ con pdf su $(0, 1)$

$$f_{\Pi}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

Trovare la distribuzione del numero di insolvenze.