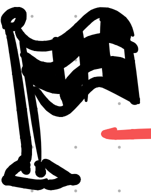
Geometria affine in 2D e 3D

Def: $S_1, S_2 \subseteq A^n(K)$ due sottospazi affini, vogliamo classificare la loro **POSIZIONE RECIPROCA**:

(S_1 di GIACITURA W_1, S_2 di GIACITURA W_2)



START → $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_1 \supseteq W_2$?

- SI → $S_1 \parallel S_2$ sono PARALLELI. $S_1 \cap S_2 \overset{?}{=} \phi$
  - SI → $S_1 \parallel S_2$ PARALLELI DISGIUNTI
  - NO → $S_1 \subseteq S_2$ o $S_1 \supseteq S_2$ [OPPURE SONO UGUALI SE HANNO LA STESSA DIM]
- NO → $S_1 \cap S_2 \overset{?}{=} \phi$
  - SI → S_1 ed S_2 sono SGHEMBI
  - NO → S_1 ed S_2 sono INCIDENTI

§. IL PIANO AFFINE $\mathbb{A}^2(K)$

SETTING:
- $V := K^2$ su K con $\dim(V) = 2$
- $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2(K)$ affine su V
- $B := \{e_1, e_2\}$ base canonica per V
- $O :=$ ORIGINE di $\mathbb{A}$ (= ORIGINE DI V IN QUESTO CASO)

RIFERIMENTO AFFINE di $\mathbb{A}$.

SOTTOSPAZI AFFINI DEL PIANO AFFINE:

- $\dim = 2$: $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{A}$ solo il piano affine stesso.
- $\dim = 1$: $r \leq \mathbb{A}$ ci sono infinite rette affini.

$$r: \begin{cases} x = x_0 + t \cdot \lambda \\ y = y_0 + t \cdot \mu \end{cases}$$

→ EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA RETTA PASSANTE PER IL PUNTO $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} =: Q$ DI $\mathbb{A}$ PARALLELA A (I.E. CON GIACITURA) $W := \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: P \in r \iff \overrightarrow{QP} \in W \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ sono LINEARM. DIP $\iff \det\begin{pmatrix} x - x_0 & \lambda \\ y - y_0 & \mu \end{pmatrix} = 0$

$$(x - x_0)\mu - \lambda(y - y_0) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x \cdot \mu - y \cdot \lambda = x_0 \cdot \mu - y_0 \lambda$$

→ EQUAZIONI CARTESIANE di r RETTA PASSANTE PER Q DI GIACITURA W

- $\dim = 0$: $P \in \mathbb{A}$ ci sono infiniti punti $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{A}$ sottosp. affini

PROP [POSIZIONI RECIPROCHE di due RETTE nel PIANO AFFINE].

$$\begin{cases} r: \ a\cdot x + b\cdot y = c \\ r': \ a'\cdot x + b'\cdot y = c' \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} i).\ \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0 \iff r /\!/ r' \\ \quad i.a).\ \text{se } r/\!/r' \Rightarrow \begin{cases} r\cap r' = \phi \iff \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \\ r \cap r' \neq \phi \iff r = r' \end{cases} \\ ii).\ \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0 \iff r\cap r' = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} b' & c' \\ b & c \end{pmatrix} \Big/ \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = x \\ \det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix} \Big/ \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = y \end{pmatrix} \in \mathbb{A} \end{array} \right.$$

PARTIAMO CON DUE **RETTE IN $\mathbb{A}^2(K)$** DATE TRAMITE LORO **EQUAZIONI CARTESIANE**

IN ALTRE PAROLE: SE **NON SONO PARALLELE** ALLORA SONO AUTOMATICAMENTE **INCIDENTI**, OVVERO: NEL PIANO NON C'È ABBASTANZA **DIMENSIONE** AFFINCHÉ DUE RETTE SIANO **SGHEMBE**.

INOLTRE: LE DUE RETTE SI INTERSECANO IN UN UNICO (NON SORPRENDENTE!) PUNTO, E LE SUE COORDINATE SONO DATE ESPLICITAMENTE, OGNUNA COME **RAPPORTO DI DETERMINANTI**.

Dim: i. $W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2(K) \mid ax+by=0 \right\} \longrightarrow \dim(W)=1$

$W' := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2(K) \mid a'x+b'y=0 \right\} \longrightarrow \dim(W')=1$

Per definizione sappiamo che $r /\!/ r' \Leftrightarrow W \subseteq W'$ oppure $W' \subseteq W$ ma sappiamo anche che per sottospazi vettoriali vale.

$W \subseteq W'$. Allora $W = W' \Leftrightarrow \dim(W) = \dim(W')$,

da cui otteniamo che $r /\!/ r' \Leftrightarrow W = W'$ e questo accade se e solo se $ax+by=0$ e $a'x+b'y=0$ sono proporzionali, perché se $W=W'$ allora ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ che soddisfa la prima deve soddisfare anche la seconda equazione e viceversa.

Quindi $r /\!/ r' \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$

i.a). Se $r /\!/ r' \Rightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \leq 1$ ma siccome $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a=b=a'=b'=0$ e in quel caso $\dim(W)=\dim(W')=0$ allora dobbiamo necessariamente avere $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$

Studiamo $r \cap r'$. Il LUOGO dei PUNTI che sta sia in r che in r' deve soddisfare ENTRAMBE le EQUAZIONI di r, r' e perciò deve soddisfare IL SISTEMA LINEARE delle DUE.

$$\Rightarrow r \cap r' : \begin{cases} a \cdot x + by = c \\ a' \cdot x + b'y = c' \end{cases} \qquad \underbrace{}_{\text{rank}(A)=1} \quad \underbrace{}_{\tilde{b}}$$

$\Rightarrow r \cap r' = \emptyset \Longleftrightarrow$ IL SISTEMA È INCOMPATIBILE

$\Updownarrow$ ROUCHÉ CAPELLI

$\text{rank}(A) \neq \text{rank}(A|\tilde{b})$

rank$(A|\tilde{b}) \neq 0$ $\Updownarrow$ rank$(A)=1$

$$\text{rank}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow \text{rank}(A|\tilde{b}) \neq 1$$

ii) Se $r \nparallel r' \Rightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rank}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 2 =$ rango massimo

$\Rightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A|\tilde{b}) \Rightarrow$ Sistema è compatibile e
ROUCHÉ CAPELLI

$\dim(S) = 2 - 2 = 0$

$\Downarrow$

$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$ DOVE x, y SI POSSONO CALCOL. CON METODO DI CRAMER $\Longleftarrow$ La soluzione è unica

$\square$

Def [FASCIO DI RETTE PROPRIO per il punto Q]

Si scelgano $\lambda, \mu \in K$ tali che $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ e $\mathbb{A}^2(K) \ni Q = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Allora si definisce un fascio di rette proprio per Q in equazione cartesiane:

$$R_{(\lambda,\mu)}: \lambda \cdot (\underbrace{ax+by-c}_{\substack{\text{UNA RETTA } r \text{ PASSANTE PER } Q:\\ ax_0+by_0-c=0}}) + \mu(\underbrace{a'x+b'y-c'}_{\substack{\text{UNA RETTA } r' \text{ PASSANTE PER } Q:\\ a'x_0+b'y_0-c'=0}}) = 0$$

$\boxed{\text{LEMMA}}$ $\{R_{(\lambda,\mu)} \mid (\lambda,\mu) \neq (0,0)\} = \{$TUTTE LE RETTE IN $\mathbb{A}^2(K)$ PASSANTI PER IL PUNTO Q$\}$

Dim.: $\subseteq$). Per (λ,μ) fissato $R_{(\lambda,\mu)}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$

[COSTRUTTIVA]

$\Rightarrow R_{(\lambda,\mu)}$ passa per Q.

$\supseteq$) Se r'' passa per Q, sia $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in r''$ un altro punto di r'' diverso da Q. Si osservi che T non può appartenere sia ad r che ad r' [due rette si intersecano in un unico punto che è già Q]. Quindi:

$$at_1 + bt_2 - c \neq 0 \quad \text{oppure} \quad a't_1 + b't_2 - c' \neq 0$$

Se non sono **ENTRAMBI** uguali a zero, allora li possiamo scegliere come parametri $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$!

$$\tilde{\lambda} := at_1 + bt_2 - c$$
$$\tilde{\mu} := -(a't_1 + b't_2 - c')$$

Allora abbiamo che:

$$R(\tilde{\lambda},\tilde{\mu})\Big|_{\substack{x=t_1\\y=t_2}} : (at_1+bt_2-c)(a't_1+b't_2-c') + (-1)(a't_1+b't_2-c')(at_1+bt_2-c) = 0$$

da cui deduciamo che:

$$T \in R(\tilde{\lambda},\tilde{\mu})$$

siccome abbiamo trovato due rette che contengono $\overrightarrow{QT}$, cioè sia r'' che $R(\tilde{\lambda},\tilde{\mu})$, per l'unicità della retta che passa per due punti abbiamo che

$$r'' = R(\tilde{\lambda},\tilde{\mu}).$$

$\square$

(quindi ogni retta che passa per Q si può scrivere come una retta del fascio e abbiamo visto COME).