Tutorato Analisi Matematica 1 - 2024/2025

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 12 - Limiti e studi di funzione - 10/12/2024

ESERCIZI

Es. 1 (17/06/2024)

Si studi la funzione $f(x) = \dfrac{x e^x}{x-1}$

(per analizzare il segno della derivata seconda, sarà bene studiare separatamente $g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 4$)

Es. 2 (21/02/2023 A)

Si studi la funzione $f(x) = x \log(x^2+4) + 4 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 4x$, determinando

i) dominio ii) limiti importanti iii) asintoti iv) derivata prima e segno

v) cresc./decresc., max./min. locali o globali vi) derivata seconda e segno vii) conc./conv./flessi

viii) simmetrie ix) grafico di f.

Es. 3 (21/02/2023 A)

i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cosh\left(\sqrt{|x|}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}}$

ii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{3x}\right) \log(x^x + 1) \tan\left(\frac{1}{\log x}\right)$

Es. 4

Risolvere i seguenti limiti con la regola di l'Hopital.

i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2}$ ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{x}$ iii) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x \log\left(1 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$ iv) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x^2}\right)$

v) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}}$ vi) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}}$ vii) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x + \sqrt{x}}$ viii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$

Es. 1

$$f(x) = \frac{x e^x}{x-1}$$

i) Dominio

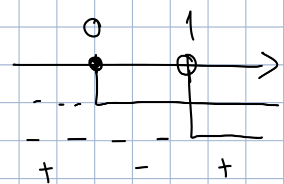
$x \neq 1 \implies \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

ii) Segno / inters.

$$f(x) \geq 0 \iff \frac{x e^x}{x-1} \geq 0$$

$N: \ x e^x \geq 0 \iff x \geq 0$

$D: \ x > 1$



$f(x) > 0$ se $x < 0$ o $x > 1$

$f(x) < 0$ se $0 < x < 1$

$f(x) = 0$ se $x = 0$

iii) Limiti / asintoti

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x e^x}{x-1} = ?$

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x e^x$ è forma ind $[-\infty \cdot 0]$ che si può risolvere con l'Hôp.

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0 \implies \lim_{x \to -\infty} \frac{x e^x}{x-1} = 0 \implies y = 0 \text{ as. orizz. a } -\infty.$$

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x e^x}{x-1} = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = +\infty$

- $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \implies x = 1$ as. verticale

f non ha max. / min. globali

iv) Derivata prima

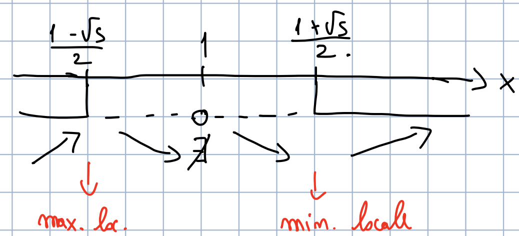
$$f'(x) = \frac{[e^x + xe^x](x-1) - xe^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x}{(x-1)^2}\left(x^2 - x - 1\right)$$

Se $x \neq 1 \rightarrow f'(x) \geq 0$ se $x^2 - x - 1 \geq 0$

$\hookrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ o $x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

f crescente per $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ o $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

f decrescente per $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 1$ o $1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



f ha max. locale in $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e min locale in $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

v) Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{(x-1)^{\cancel{2}}\left[e^x(x^2-x-1) + e^x(2x-1)\right] - 2\cancel{(x-1)}\, e^x(x^2-x-1)}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{e^x}{(x-1)^3}\left[(x-1)(x^2+x-2) - 2x^2 + 2x + 2\right] = \frac{e^x}{(x-1)^3}\left(x^3 + \cancel{x^2} - \cancel{2x} - \cancel{x^2} - x + 2 - 2x^2 + \cancel{2x} + 2\right)$$

$$= \frac{e^x}{(x-1)^3}\left(x^3 - 2x^2 - x + 4\right)$$

Come suggerito dal testo per studiare il segno di f'' serve studiare il segno di

$g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 4$, che però non può essere determinato analiticamente a meno di usare esplicitamente formule risolutive per eq. di 3° grado (non chieste all'esame).

Studiando limiti e derivata prima di g possiamo però ottenere informazioni in più.

- dom $g = \mathbb{R}$

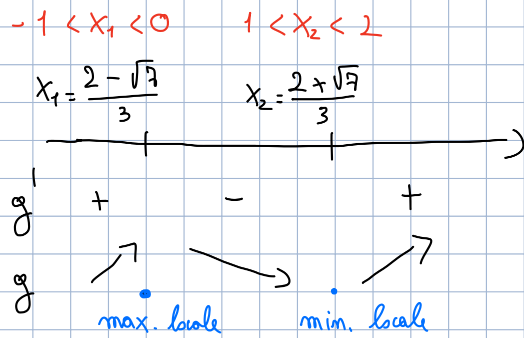
- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ $\Rightarrow$ per il Teorema di esistenza degli zeri
$\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R} : g(\bar{x}) = 0$ (ne esiste almeno uno!)
ma potrebbero esserci 1, 2, o 3 zeri di g.

(notiamo anche che $g(0) = 4 > 0$, $g(1) = 2 > 0$
$g(-1) = 2 > 0$ $\longrightarrow$ uno zero $\bar{x}$ è sicuramente < -1.)

- $g'(x) = 3x^2 - 4x - 1$

$g'(x) \geq 0 \iff 3x^2 - 4x - 1 \geq 0$

$\hookrightarrow x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+3}}{3} = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$



È importante valutare il segno di $g(x_1)$ e $g(x_2)$ per capire il numero di zeri di g:

$$g(x_1) = \left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right) + 4$$

$$= \frac{8 - 7\sqrt{7} + 3\cdot 2\cdot 7 - 3\cdot 4\cdot\sqrt{7}}{27} - 2\cdot\frac{4+7-4\sqrt{7}}{9} - \frac{2-\sqrt{7}}{3} + 4$$

$$= \frac{50 - 19\sqrt{7} - 18(11 - 4\sqrt{7}) - 9(2-\sqrt{7}) + 108}{27} = \frac{50 - 19\sqrt{7} - 198 + 72\sqrt{7} - 18 + 9\sqrt{7} + 108}{27}$$

$$= \frac{-58 + 62\sqrt{7}}{27} > 0$$

(se si riesce a dire se > 0 o < 0 senza fare tutto il conto va bene)

$$g(x_2) = \left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right) + 4 =$$

$$= \frac{8 + 7\sqrt{7} + 3\cdot 2\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot\sqrt{7}}{27} - 2\cdot\frac{4+7+4\sqrt{7}}{9} - \frac{2+\sqrt{7}}{3} + 4$$

$$= \frac{50 + 19\sqrt{7} - 6(11 + 4\sqrt{7}) - 9(2+\sqrt{7}) + 108}{27} = \frac{158 + 19\sqrt{7} - 66 - 24\sqrt{7} - 18 - 9\sqrt{7}}{27}$$

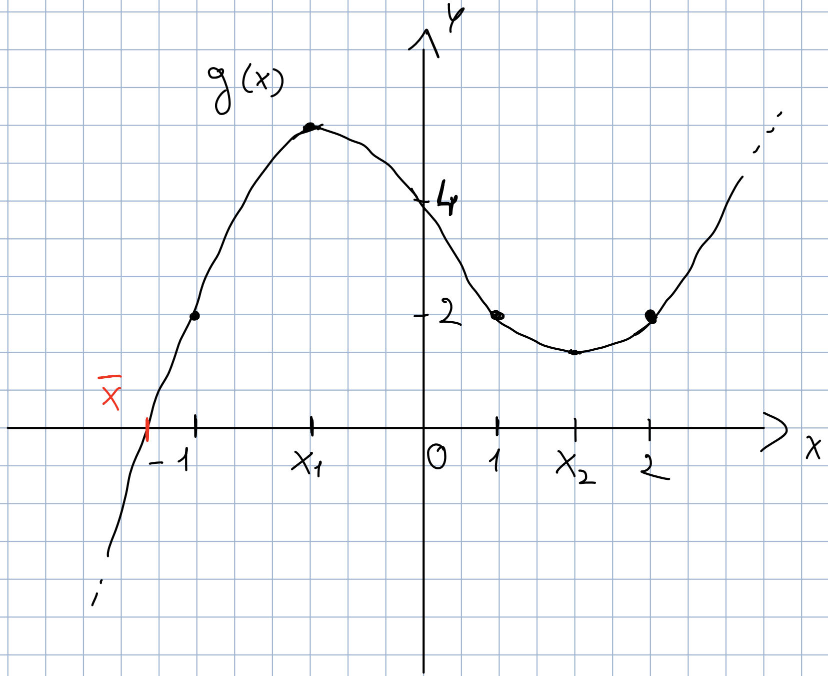
$$= \frac{74 - 14\sqrt{7}}{27}$$

Notiamo che: $7 < 9 \Rightarrow \sqrt{7} < 3 \Rightarrow 14\sqrt{7} < 42$

$\Rightarrow -42 < -14\sqrt{7}$ $\Rightarrow 74 - 42 < 74 - 14\sqrt{7}$

$\Rightarrow 0 < 32 < 74 - 14\sqrt{7}$ $\Rightarrow g(x_2) > 0$

• Siamo quindi in grado di tracciare un grafico qualitativo di g:



$\Rightarrow \exists! \; \bar{x} < -1$ tale che $g(\bar{x}) = 0$

$g(x) < 0$ se $x < \bar{x}$

$g(x) > 0$ se $x > \bar{x}$

[si poteva dedurre facilmente che $g(x_1) > 0$ senza fare il conto, ma che fosse anche $g(x_2) > 0$ non so...]

Torniamo al punto v) dello studio di f:

$$f''(x) = \frac{e^x}{(x-1)^3}\left(x^3 - 2x^2 - x + 4\right)$$

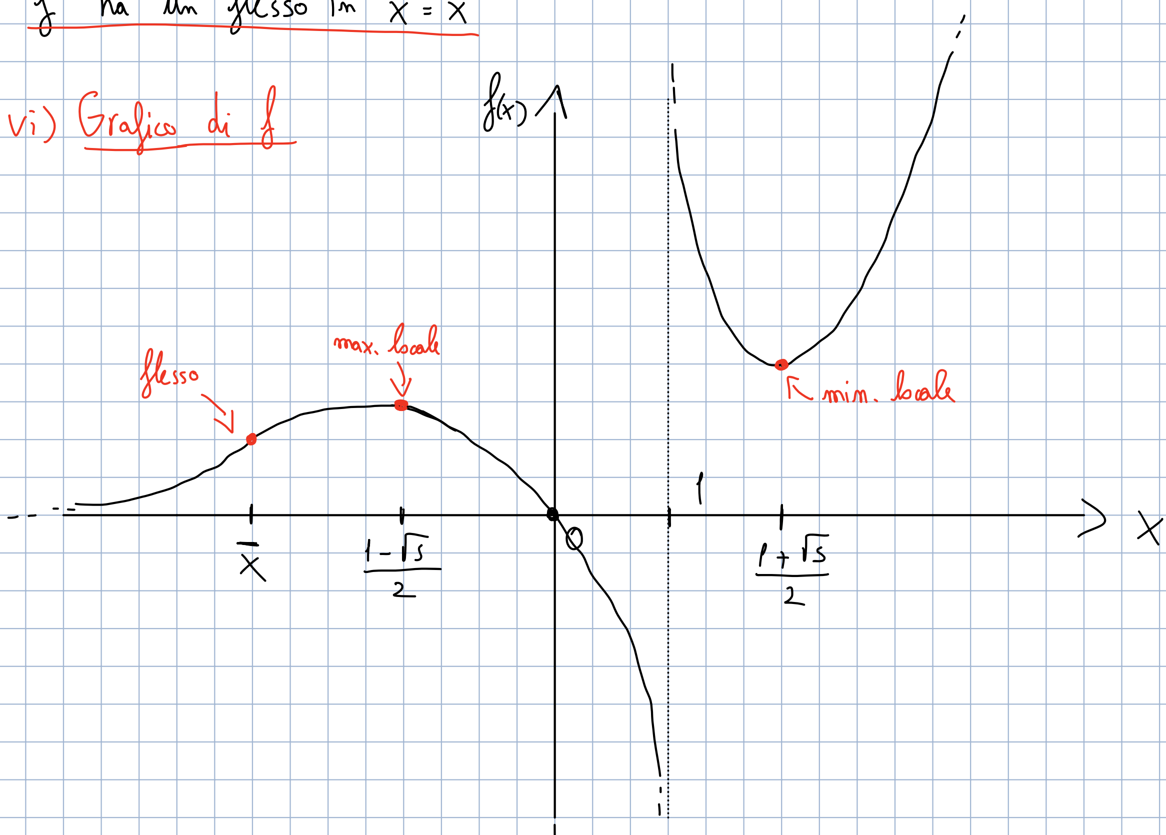
		$\bar{x}$		1	
f''	+		−	$\nexists$	+
f	$\cup$		$\cap$	$\nexists$	$\cup$

f convessa per $x < \bar{x}$ o $x > 1$

f concava per $\bar{x} < x < 1$

f ha un flesso in $x = \bar{x}$

vi) Grafico di f



Es. 2

$$f(x) = x \log(x^2+4) + 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 4x$$

i) $x^2+4>0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{\text{dom} f = \mathbb{R}}$

Anche se richiesto al punto viii), notiamo subito che $f(0)=0$ e

$$f(-x) = -x \log((-x)^2+4) + 4\arctan\left(\frac{-x}{2}\right) + 4x$$
$$= -x\log(x^2+4) - 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + 4x = -f(x)$$

$\Rightarrow$ f è dispari, ovvero simm. rispetto l'origine

$\hookrightarrow$ notarlo ci permette di saltare qualche conto, o di avere delle verifiche sulla correttezza di quanto stiamo facendo

ii) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$\displaystyle \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ (per simmetria)

iii) Non ci sono asintoti

iv) $$f'(x) = \log(x^2+4) + \frac{2x^2}{x^2+4} + \cancel{4}^{\,2}\, \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} - 4$$

$$= \log(x^2+4) + \frac{2x^2}{x^2+4} + \frac{8}{x^2+4} - 4 = \log(x^2+4) + \frac{2\cancel{(x^2+4)}}{\cancel{x^2+4}} - 4$$

$$= \log(x^2+4) - 2 \longrightarrow \text{ben definita } \forall x \in \text{dom} f$$

$\underline{f'(x) \geq 0} \iff \log(x^2+4) \geq 2 \iff x^2+4 \geq e^2 \iff x^2 \geq e^2 - 4$

$\iff \underline{x \leq -\sqrt{e^2-4} \text{ o } x \geq \sqrt{e^2-4}}$ (N.B. $e>2 \Rightarrow e^2>4 \Rightarrow e^2-4>0$)

v) f crescente per $x < -\sqrt{e^2-4}$ o $x > \sqrt{e^2-4}$

f decrescente per $-\sqrt{e^2-4} < x < +\sqrt{e^2-4}$

$x = -\sqrt{e^2-4}$ max. locale , $x = \sqrt{e^2-4}$ min. locale . $\nexists$ max./min. globali

(N.B. quanto visto finora è in linea con la disparità di f)

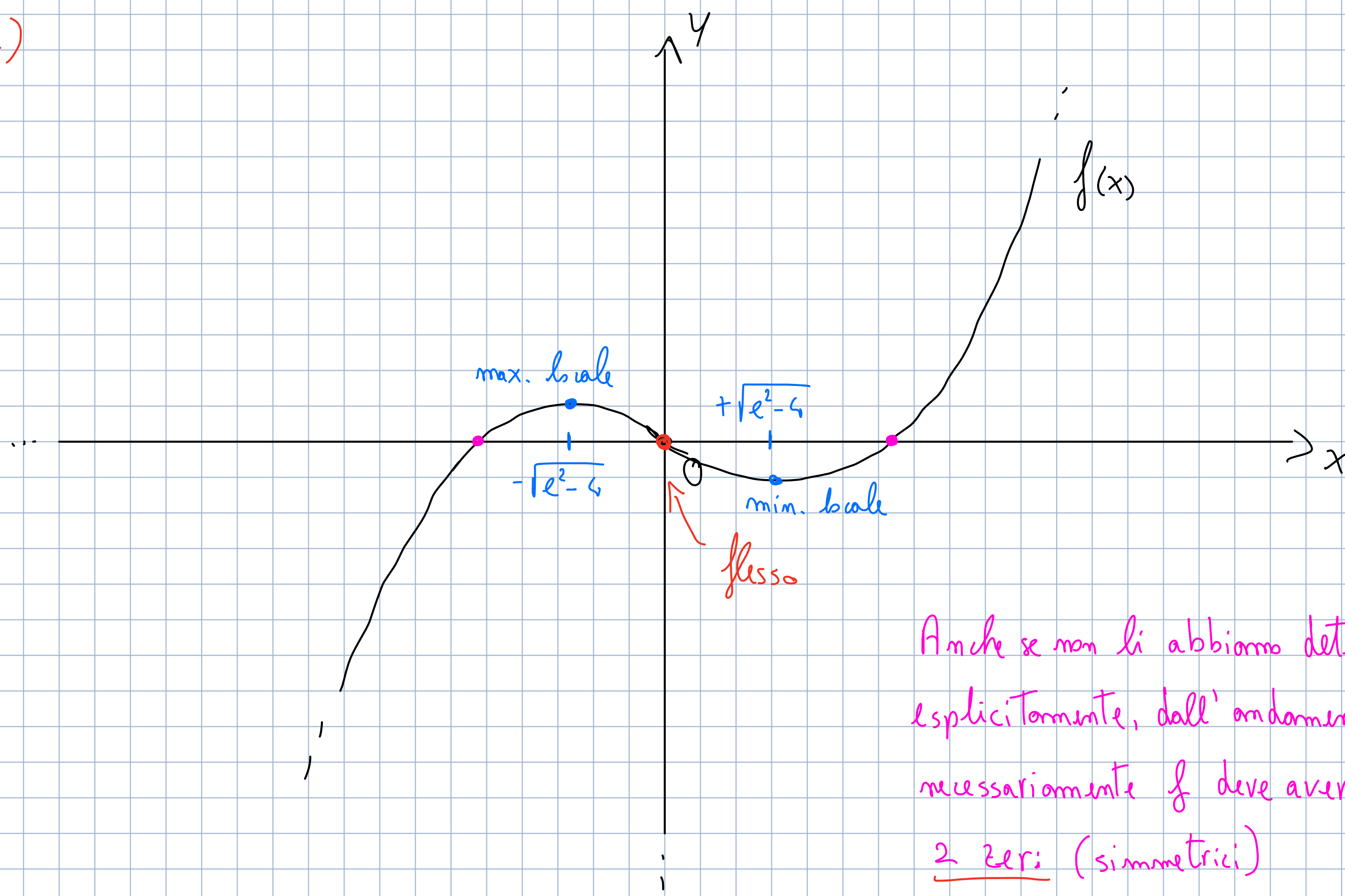
vi) $f''(x) = \dfrac{2x}{x^2+4} \longrightarrow$ ben definita $\forall x \in \operatorname{dom} f$

$f''(x) \geq 0$ per $x \geq 0$

vii) f convessa per $x > 0$, f concava per $x < 0$, f ha un flesso per $x = 0$

viii) Abbiamo visto che $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ dispari (dobbiamo mostrarlo nel grafico!)

ix)



Anche se non li abbiamo determinati esplicitamente, dall'andamento necessariamente f deve avere 2 zeri (simmetrici)

Es. 3

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh(\sqrt{|x|})}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}}$

$t = -x \to t^2 = x^2$

Notiamo che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cosh(\sqrt{x})}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cosh(\sqrt{-x})}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cosh(\sqrt{t})}{\sqrt{\operatorname{sen}(t^2)}}$

dunque limite destro e sinistro, se esistono, coincidono.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cosh(\sqrt{x})}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cosh(\sqrt{x})}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\left[\frac{1-\cosh(\sqrt{x})}{x}\right]}_{\text{sostituendo } t=\sqrt{x} \text{ si vede che } \to -\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\left[\sqrt{\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}}\right]}_{\text{sost. } t=x^2 \text{ si vede che } \to\sqrt{1}=1} = -\frac{1}{2}$$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{3x}\right)\log(x^x+1)\tan\left(\frac{1}{\log x}\right) \longrightarrow$ forma ind. $[0\cdot\infty]$

$$\log(x^x+1) = \log\left[x^x\left(1+\frac{1}{x^x}\right)\right] = \log(x^x)+\log\left(1+\frac{1}{x^x}\right) = x\log x + \log\left(1+\frac{1}{x^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left[\operatorname{senh}\left(\frac{1}{3x}\right)\cdot x\log x\cdot\tan\left(\frac{1}{\log x}\right) + \underbrace{\underbrace{\operatorname{senh}\left(\frac{1}{3x}\right)}_{\to 0}\cdot\underbrace{\log\left(1+\frac{1}{x^x}\right)}_{\to 0}\cdot\underbrace{\tan\left(\frac{1}{\log x}\right)}_{\to 0}}_{\to 0}\right]$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{3x}\right)\cdot x\log x\cdot\tan\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{1}{3x}\right)}{\frac{1}{3x}}\cdot\left(\frac{1}{3\cancel{x}}\right)\cdot\cancel{x}\log x\cdot\tan\left(\frac{1}{\log x}\right) = \frac{1}{3}\lim_{x\to +\infty} \underbrace{\boxed{\frac{\operatorname{senh}\left(\frac{1}{3x}\right)}{\frac{1}{3x}}}}_{①}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\tan\left(\frac{1}{\log x}\right)}{\frac{1}{\log x}}}}_{②} = \frac{1}{3}$$

① $\displaystyle = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{senh}(t)}{t} = 1$

$t = \frac{1}{x}$, se $x\to+\infty$ allora $t\to 0$

② $\displaystyle = \lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t} = 1$

$t = \frac{1}{\log x}$, se $x\to+\infty$ allora $t\to 0$

Es. 4

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x+2x^2} = -\frac{1}{2}$

ii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{x}$

Notiamo prima che $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}} \overset{H}{=} e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}}} = e^0 = 1$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\log x}-1}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\log x}(\log x-1)}{1} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\boxed{x^x}}_{\to 1} \underbrace{(\log x - 1)}_{\to -\infty} = -\infty$

iii) $\lim_{x\to -\infty} x \log\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\log\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{-\cancel{\frac{1}{x^2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\operatorname{sen}\frac{1}{x}}}{-\cancel{\frac{1}{x^2}}}$

$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1+0} = 1$

iv) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\tan x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{x\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \overset{\to 1}{\boxed{\frac{x}{\operatorname{sen} x}}} \cdot \overset{\to ?}{\boxed{\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}}}$

Concentriamoci su: $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\cos x} - \cancel{x}\operatorname{sen} x - \cancel{\cos x}}{3x^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = -\frac{1}{3}$

Dunque $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\tan x} - \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{3}$

v) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(2^{\frac{1}{x}}\right)}{\frac{d}{dx}\left(2^{\frac{1}{x}}\right)} = 1$

vi) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{3}$ (no forma ind.)

vii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x+\sqrt{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}} = 0$

viii) $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(\operatorname{sen} x+\cos x)}{x}} \overset{H}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}} = e$