

10 dicembre

$$\int_1^{+\infty} \lg(1 + \frac{1}{x}) \operatorname{th}(x) \sin(x) dx$$

è sommabile?

Supponiamo che tutto dipende dal comportamento di questa funzione per  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\begin{aligned} \text{Ricordiamo } 1 - \operatorname{th}(x) &= 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2 \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2 \frac{e^{-x}}{e^x(1 + e^{-2x})} \\ &= \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{e^x(1 + e^{-2x})} \\ &= 2e^{-2x} \frac{1}{1 + e^{-2x}} = 2e^{-2x}(1 + o(1)) \end{aligned}$$

$$\text{Poi si ha } \operatorname{th}(x) = \operatorname{th}(x) - 1 + 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lg(1 + \frac{1}{x}) \operatorname{th}(x) \sin(x) = \\ &= \lg(1 + \frac{1}{x}) \sin(x) - \underbrace{\lg(1 + \frac{1}{x}) (1 - \operatorname{th}(x)) \sin(x)}_{\text{è o.m. integrabile}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(1 + \frac{1}{x}) (1 - \operatorname{th}(x)) |\sin(x)|}{\frac{1}{x}} &= \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\lg(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \frac{2e^{-2x}}{\frac{1}{x}} |\sin(x)| &= \\ = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} |\sin(x)| &= 0 \end{aligned}$$

$$0 \leq \frac{\frac{x}{e^{2x}} |\sin(x)|}{\frac{1}{x}} \leq \frac{x}{e^{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Se } \frac{1}{x^2} \in L([1, +\infty)) \Rightarrow \lg(1 + \frac{1}{x}) (1 - \operatorname{th}(x)) \sin(x) \in L([1, +\infty))$$

$$\Rightarrow \lg(1 + \frac{1}{x}) (1 - \operatorname{th}(x)) \sin(x) \in L([1, +\infty))$$

$$\begin{aligned} \lg(1 + \frac{1}{x}) \sin(x) & \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + y)}{y} = 1 \\ \lg(1 + y) &= y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1 \end{aligned}$$

$$\lg(1 + \frac{1}{x}) \sin(x) = (\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) \sin(x)$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\left( \frac{\sin(x)}{x} \right)}_{\substack{\in L([1, +\infty)) \\ \text{ma non è o.m. integrabile}}} - \underbrace{\left( \frac{\sin(x)}{2x^2} \right)}_{\substack{\text{è o.m. integrabile in } [1, +\infty) \\ \text{ma che } |\frac{\sin(x)}{2x^2}| \leq \frac{1}{2x^2} \in L([1, +\infty)) \\ \text{e quindi per confronto } |\frac{\sin(x)}{2x^2}| \in L([1, +\infty))}} + o(\frac{1}{x^2}) \sin(x) \end{aligned}$$

$$o(\frac{1}{x^2}) \sin(x) \quad ?$$

$$|o(\frac{1}{x^2}) \sin(x)| = o(\frac{1}{x^2}) |\sin(x)|$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{o(\frac{1}{x^2}) |\sin(x)|}{\frac{1}{x^2}} &= 0 \\ 0 \leq \frac{o(\frac{1}{x^2}) |\sin(x)|}{\frac{1}{x^2}} &\leq \frac{o(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = \lg(1 + \frac{1}{x}) \operatorname{th}(x) \sin(x) =$$

$$\begin{aligned} &= \lg(1 + \frac{1}{x}) \sin(x) - \lg(1 + \frac{1}{x}) (1 - \operatorname{th}(x)) \sin(x) \\ &= \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\text{non int}} - \underbrace{\frac{\sin(x)}{2x^2}}_{\text{non int}} + \underbrace{o(\frac{1}{x^2}) \sin(x)}_{\text{non int}} - \underbrace{\lg(1 + \frac{1}{x}) (1 - \operatorname{th}(x)) \sin(x)}_{\text{non int}} \end{aligned}$$

(se  $f$  e  $g$  sono o.m. int allora  $|f+g| \leq |f| + |g|$  e siccome  $|f|$  e  $|g|$  sono integrabili, lo è la loro somma e per confronto anche  $|f+g|$  è int  $\Rightarrow f+g$  è o.m. integrabile)

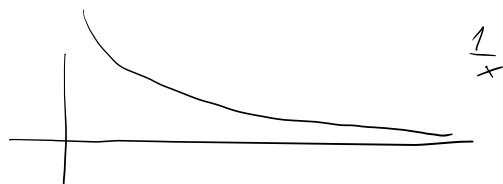
Ma visto che  $f$  non è o.m. integrabile, poiché  $g$  lo è, allora, da questo fatto sulla parità, si conclude che  $\frac{\sin(x)}{x}$  non è integrabile, e quindi la  $\int$  è falsa.

Esercizio Sia  $f \in L([1, +\infty))$ .

Supponiamo che esista  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ .

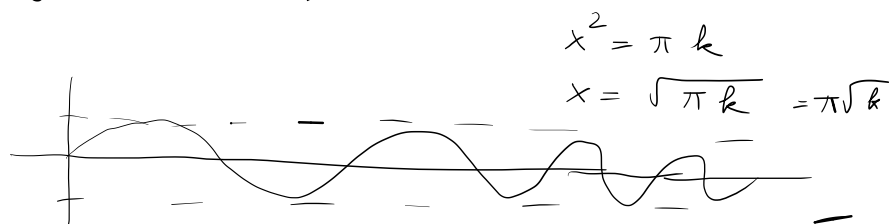
Allora deve essere  $L=0$ .

E<sub>1</sub>



Esercizio  $\sin(x^p) \in L[1, +\infty)$  con  $p > 1$

ad es  $\sin(x^2) \in L([1, +\infty))$



$$\int_1^R \sin(x^p) dx =$$

$$\begin{aligned} y &= x^p & x &= y^{\frac{1}{p}} \\ dy &= p x^{p-1} dx = \\ &= p y^{\frac{p-1}{p}} dx \end{aligned}$$

$$dx = \frac{1}{p y^{\frac{p-1}{p}}} dy$$

$$= \frac{1}{p} \int_1^{R^p} \frac{\sin(y)}{y^{\frac{p-1}{p}}} dy$$

$$p > 1 \Rightarrow \frac{p-1}{p} > 0$$

Supponiamo che  $\frac{1}{p} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^{R^p} \frac{\sin(y)}{y^{\frac{p-1}{p}}} dy$

esiste ed è finito perché  $\frac{\sin y}{y^{\frac{p-1}{p}}} \in L([1, +\infty))$

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^p) dx = \frac{1}{p} \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{p-1}{p}}} dy$$

Polemoni di Mc Laurin  
di  $\arctan x$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{j=0}^n (-1)^j y^j + o(y^n) \quad y = x^2$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^n (-1)^j x^{2j} + o(x^{2n})$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j t^{2j} + o(t^{2n}) \right) dt$$

$$= \sum_{j=0}^n (-1)^j \int_0^x t^{2j} dt + \int_0^x o(t^{2n}) dt$$

$$\arctan x = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + \underbrace{\int_0^x o(t^{2n}) dt}_{\text{dove } o(x^{2n+1}) \text{ perche'}}$$

dove  $o(x^{2n+1})$  perche'

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x o(t^{2n}) dt}{x^{2n+1}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^{2n})}{(2n+1)x^{2n}} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^x o(t^{2n}) dt = o(x^{2n+1})$$

$\frac{1}{\lg^p x} \in L((1, 2])$  si solo se  $p < 1$

$$\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{\lg^p x} dx =$$

$$y = \lg x \quad x = e^y$$

$$dy = \frac{1}{x} dx$$

$$dx = e^y dy$$

$$= \int_{\lg(1+\varepsilon)}^{\lg 2} \frac{e^y}{y^p} dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} ?$$

e il limite esiste ci dice che  $\frac{e^y}{y^p} \in L((0, \lg 2])$

Si uno confronto asintotico confrontando con

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^y}{y^p}}{\frac{1}{y^p}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} e^y = e^0 = 1$$

$$\frac{e^y}{y^p} \in L((0, \lg 2]) \Leftrightarrow \frac{1}{y^p} \in L((0, \lg 2]) \Leftrightarrow p < 1$$

Polinomio di McLaurin

$P_6$

von

$$f(x) = \arctan(1+x^2)$$

E' equazione differenziale

Sono equazioni in cui l'incognita è una funzione

E1

$$y'' = x$$

$$y' = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

$$y' = \arctan x$$

$$y = \int \arctan x \, dx = \int (x)' \arctan x = x \arctan x$$

$$- \int \frac{x}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$$

$$y' = f(x) \quad \text{esempio di equazione lineare del 1° ordine}$$

$$y = \int f(x) \, dx$$

$$\overbrace{y' + p(x)y}^{L[y]} = f(x) \quad \text{è la generica equazione lineare del 1° ordine, con } p, f \in C^0(I)$$

Viene detta lineare perché  $y \mapsto L[y]$  è un operatore lineare.

$$y' + p(x)y = f(x) \quad \cdot \mu(x)$$

$$\mu y' + \mu p(x)y = \mu f(x)$$

Si cerca  $\mu$  in modo che

$$\mu y' + \mu p(x)y = (\mu y)' = \mu y' + \mu' y$$

$$\cancel{\mu y'} + \mu p y = \cancel{\mu y'} + \mu' y$$

$$y \mu p(x) = \mu' y \quad \text{questo è soddisfatto sempre se}$$

$$\mu' = \mu p(x) \quad \text{e questo è soddisfatto per}$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

$$\mu'(x) = e^{\int p(x) dx} \left( \int p(x) dx \right)' = \mu(x) p(x)$$

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (y' + p(x)y)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$(y\mu)' = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x) \, dx$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int f(x)\mu(x) \, dx = e^{-\int p(x) dx} \underbrace{\int f(x)e^{\int p(x) dx} dx}$$

E4  $y' + xy = e^x(x+1) \quad \mu = e^{\int x dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$

$$(y e^{\frac{x^2}{2}})' = e^{\frac{x^2}{2}} e^x (x+1)$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{\frac{x^2}{2}+x} (x+1) \, dx$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}} [e^{\frac{x^2}{2}+x} + C]$$

$$y = e^x + C e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{questo è la soluzione generale dell'equazione.}$$

$$\begin{cases} y' + xy = e^x(x+1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{problema di Cauchy}$$

$$\begin{cases} y' + xy = e^x(x+1) \\ y(0) = 10 \end{cases}$$

si cerca la soluzione generale  $y = e^x + C e^{-\frac{x^2}{2}}$  e si impone che

$$y(0) = 1 + C = 10 \Rightarrow C = 9$$

$$y = e^x + 9 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

≡ polinomi del 1° ordine a coefficienti costanti.

$$\underbrace{y' + y}_{L[y]} = e^x$$

$[Y] = 0$  è l'equazione omogenea associata

$L[y] = y' + y = 0$       Cerchiamo soluzione  $y = e^{rx}$

$$\begin{aligned} L[e^{rx}] &= (e^{rx})' + e^{rx} = r e^{rx} + e^{rx} = \\ &= e^{rx} (\underbrace{r+1}_{p(r)}) = 0 \iff r+1=0 \\ &\qquad \qquad \qquad \iff r=-1 \end{aligned}$$

$y = e^{-x}$  è una soluzione

$$y_h = \text{soluzione generale dell'equazione omogenea} = C e^{-x}$$

$$L[C\bar{e}^x] = C \underbrace{L[\bar{e}^x]}_0 = 0$$

$$\begin{aligned} y' + y &= 0 \\ y(0) &= 7 \\ y &= C e^{-x} \\ y(0) = 7 &= C e^0 = C \\ C &= 7 \\ \boxed{y = 7 e^{-x}} \end{aligned}$$

Le soluzioni di  $y' + y = 0$  formano uno spazio vettoriale  $\{C e^{-x} : C \in \mathbb{R}\}$

$\underbrace{L[y]}_{y'+y=x}$   
 $L[y] = x$

$$L[y_1 - y_2] = L[y_1] - L[y_2] = x - x = 0$$

così  $y_1 - y_2$  è una soluzione dell'equazione omogenea.

Questo ci dice che  $y_g = y_h + y_p$  dove

$y_g$  è la soluzione generale della non omogenea

$y_n$  è una soluzione particolare <sup>omogenea</sup> della non omogenea.

Ad esempio  $y' + y = x$   
 $y_h = C e^{-x}$

$$y_p = ax + b \quad \text{Vergleiche } L[y_p] = x$$

$$y'_i + y_p = (ax+b)' + (ax+b) = ax + (a+b) = x$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \quad b = -1$$

$$y_p = x - 1$$

$$y_g = x^{-1} + C e^{-x}$$

$$\begin{cases} y' + y = x \\ y(0) = 4 \end{cases} \quad y = x - 1 + C e^{-x}$$

$$y(0) = -1 + C = 4 \Rightarrow C = 5$$