

EQUAZIONI DI QUINTO GRADO

Secoli di tentativi

La ricerca delle soluzioni delle equazioni algebriche, di vario grado, in una incognita, rappresenta un capitolo molto interessante della storia delle matematiche, nel quale vengono strettamente ad intrecciarsi, per le equazioni di quinto grado, contributi provenienti dai settori dell'algebra (teoria dei numeri e teoria delle equazioni) e dell'analisi infinitesimale cosiddetta complessa (specificamente, funzioni ellittiche).

Per secoli, l'obiettivo dei matematici è stato quello di tentare di trovare, per le equazioni algebriche di qualunque grado, una *formula risolutiva per radicali algebrici* (equazioni *risolubili per radicali*), vale a dire un'espressione, per le radici dell'equazione algebrica, che, a partire dai coefficienti dell'equazione stessa, fosse il risultato dell'applicazione di un numero finito di operazioni *algebriche* (somma e sottrazione, prodotto e divisione, oltre all'estrazione di radici di vario indice).

Era un dato acquisito, nella seconda metà del XVI secolo, che le equazioni algebriche di grado inferiore a cinque fossero risolubili per radicali. Si sapevano risolvere per radicali le equazioni algebriche di secondo grado, sin dai tempi della civiltà babilonese; mentre le equazioni di terzo grado (con coefficienti interi e "rotti", cioè razionali) erano state risolte, mediante radicali, proprio nel XVI secolo, da **Scipione Dal Ferro** (1465-1526), **Niccolò Tartaglia** (1466-1557) e **Girolamo Cardano** (1501-1576); infine, qualche anno più tardi, **Lodovico Ferrari** (1522-1565) risolveva, con radicali, anche le equazioni di quarto grado. Si erano poi avuti, per circa due secoli, tentativi per risolvere ancora mediante radicali le equazioni algebriche di quinto grado. Avevano tentato di farlo matematici come **Leonhard Euler** (1707- 1783), **Etienne Bézout** (1730-1783), **Alexandre Théophile Vandermonde** (1735- 1796), **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813).

Un'altra prospettiva

Sembra che nessuno, prima di **Paolo Ruffini** (1765-1822), abbia però pensato di provare, al contrario, l'*impossibilità* di risolvere per radicali le equazioni algebriche di quinto grado.

Nella seconda metà del XVIII secolo lo studio delle soluzioni di un'equazione algebrica si orientò in una nuova direzione: non più verso la scoperta di una formula risolutiva esplicita ma bensì verso la ricerca della possibile affermazione dell'esistenza di soluzioni.

Il 1799 fu un anno di svolta per la teoria delle equazioni algebriche. Furono pubblicati, infatti, due importantissimi lavori, l'uno sul *Teorema fondamentale dell'algebra*, dovuto a **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), col quale si afferma che un'equazione (algebraica) di grado n ammette sempre n soluzioni nel campo dei numeri complessi, tenuto conto che alcune soluzioni possono essere multiple.

L'altro, dal titolo *La Teoria generale delle equazioni*, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto, dovuto a **Paolo Ruffini**. Il risultato, conseguito da Ruffini, asserisce, in breve, che un'equazione algebrica di grado superiore al quarto non è, *in generale*, risolubile per radicali. Ovviamente esso non afferma che *qualunque* equazione algebrica di grado superiore al quarto non sia risolubile per radicali: così, ad esempio, $x^5 + x + 1 = 0$ non è risolubile per radicali mentre lo è $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$.

A vent'anni dalla pubblicazione della *Teoria generale delle equazioni* di Ruffini, un giovane matematico norvegese, **Niels Henrik Abel** (1802- 1829), tentava pure lui di risolvere per radicali le equazioni di quinto grado; forse per il fatto che l'opera di Ruffini era poco conosciuta dai matematici europei o perché i ragionamenti ivi svolti erano talmente complicati da non essere facilmente comprensibili.

Ma poi lo stesso Abel pubblicò, nel 1824, *Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré* in cui arrivò, mettendosi nella visione di Ruffini, a dimostrare l'impossibilità di trovare una soluzione per radicali dell'equazione algebrica generale di quinto grado:

"Il est impossible de résoudre par des radicaux l'équation générale du cinquième degré ... Il suit immédiatement de ce théorème qu'il est de même impossible de résoudre par des radicaux les équations générale des degrés supérieurs au cinquième".

Due anni più tardi, nel 1826, Abel pubblicò, in aggiunta, un articolo molto ampio dal titolo: *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré* dove conclude con l'affermazione:

"Donc les équations des quatre premiers degrés sont les seules qui puissent être résolues algébriquement d'une manière générale".

Il riferimento ad Abel porta a ricordare che egli, insieme al matematico tedesco **Carl Gustav Jacob Jacobi** (1804-1851), è stato l'ideatore della *teoria delle funzioni ellittiche*, settore dell'analisi complessa che oltre ad essere indispensabile vari campi di ricerca, è legato anche alla risoluzione delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto.

La fine della storia

La precoce morte non permise ad Abel di portare a termine altre ricerche sulla risolubilità delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto. L'eredità fu raccolta dal giovane matematico francese **Évariste Galois** (1811-1832), il quale, pur morendo, a sua volta, poco più che ventenne, fu capace di proporre concetti divenuti fondamentali per l'algebra moderna.

Lo schema delle idee di Galois si trova, com'è noto, in una lettera (una sorta di testamento scientifico) che egli scrisse all'amico Auguste Chevalier, il 29 Maggio 1832, la notte prima del duello con Perscheux d'Herbenville, durante il quale Galois rimase gravemente ferito, cosa che lo portò alla morte il 31 Maggio successivo quando non aveva ancora compiuto i 21 anni.

Soltanto dopo quattordici anni dalla scomparsa di Galois, venivano pubblicati, nel **1846** sulla rivista "*Journal de mathématiques pures et appliquées*" (diretta da Liouville che l'aveva fondata nel 1836), i suoi lavori, ivi compresa la memoria *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* – quella respinta dall'Accademia delle Scienze di Parigi – nella quale erano inseriti i risultati sulla risolubilità delle equazioni algebriche.

Con Galois la ricerca intorno alla risolubilità delle equazioni algebriche procede secondo una prospettiva nuova consistente nello studio, "astratto", delle proprietà di un gruppo associato all'equazione, il *gruppo di Galois*, che, con linguaggio attuale, è definito come il gruppo degli automorfismi del "campo di spezzamento" del polinomio associato all'equazione; automorfismi che fissano gli elementi del campo a cui appartengono i coefficienti del polinomio.

Infatti, Galois giunse a formulare una condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità, mediante radicali, di una generica equazione algebrica di grado n , oggi così enunciata:

Un'equazione algebrica di grado n è risolubile per radicali se e soltanto se il gruppo di Galois associato all'equazione è risolubile, vale a dire se e soltanto se il gruppo di Galois G associato all'equazione ammette una catena di sottogruppi

$$1 = H_0 < H_1 < \dots < H_r = G$$

tale che H_i è normale in H_{i+1} e il quoziente H_{i+1}/H_i è abeliano per ogni $i = 0, \dots, r-1$.

Essendo il gruppo di Galois della generica equazione algebrica di grado n isomorfo al gruppo simmetrico S_n (oppure a un suo sottogruppo proprio) delle permutazioni su n oggetti (in questo caso,

le radici dell'equazione), si ha che una generica equazione algebrica di grado n è risolubile per radicali se e soltanto se S_n (oppure, rispettivamente, un suo sottogruppo) è risolubile come gruppo.

Ma, per $n > 4$, il gruppo S_n non è risolubile; quindi, in generale, un'equazione algebrica di grado $n > 4$, non è risolubile per radicali, come già Ruffini ed Abel avevano osservato.

Volendo ricorrere a un esempio di equazione non risolubile per radicali, si consideri un'equazione il cui polinomio associato sia irriducibile, di grado p , con p primo, a coefficienti razionali e possieda $p - 2$ radici reali e 2 radici complesse coniugate. In tal caso il gruppo di Galois del polinomio, quindi dell'equazione, rispetto al campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, è isomorfo a S_p che nel caso in cui $p \geq 5$ non è risolubile e perciò una siffatta equazione non è risolubile per radicali.

Liberamente tratto da "Intorno alla risoluzione delle equazioni algebriche di quinto grado per funzioni ellittiche in Betti e Brioschi - Tra opere a stampa e corrispondenze epistolari (1850-1860)" di Anna Maria Mercurio e Nicla Palladino