11 dicembre

<u>Def</u> (Equazioni differenziali lineari ordinarie scalari del 2° ordine)

Sono della forma

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x)$$

Sono dette lineari perché

$$L[y] = y'' + p(x) y' + q(x) y$$

è un "operatore" lineare nel senso che

$$L[\lambda y_1 + \mu y_2] = \lambda L[y_1] + \mu L[y_2]$$

$\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni coppia di funzioni y_1 ed y_2 che ammettono derivate fino all'ordine 2.

~~Ess~~ L'equazione

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 \qquad \text{è detta}$$

omogenea.

<u>Teorema 1</u> L'insieme delle soluzioni di una equazione della forma $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2.

Qui p, q sono funzioni continue in un intervallo

Osservazioni

1) Per una equazione del 2° ordine il problema di Cauchy

$$* \quad \begin{cases} y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

dove $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$ sono due costanti arbitrarie assegnate

e c'è un teorema che garantisce che se

$f, p, q \in C^0(I)$, $x_0 \in I$, esiste una unica soluzione y di $*$.

Il teorema 1 è una conseguenza di questo

2) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

$$y_h = A y_1 + B y_2 \qquad \text{con } A, B \in \mathbb{R}$$

e $\{y_1, y_2\}$ è una base dello spazio vettoriale delle soluzioni.

3) Tutte le soluzioni di una equazione non omogenea sono della forma

$y_g = y_h + y_p$ dove y_h è la soluzione generale della equazione omogenea associata e y_p è una qualsiasi soluzione (viene detta soluzione particolare) della non omogenea

4) quando $p(x) \equiv b$ $q(x) \equiv c$ si parla di equazioni a coefficienti costanti.

$$\underbrace{y'' - 5y' + 6y}_{L[y]} = 1 \qquad (2)$$

Vogliamo trovare la soluzione generale.

$$y_g = y_h + y_p$$

y_p una una soluzione particolare di (2)

y_h la soluzione generale di

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad (3)$$

Notare che se cerco $y_p = C$ con C costante

$$L[y_p] = C'' - 5C' + 6C = 6C = 1$$

$$C = \frac{1}{6} \qquad y_p = \frac{1}{6}$$

Cerchiamo y_h

$y'' - 5y' + 6y^{(0)} = 0$ (3)

Si cercano soluzioni della forma $y = e^{rx}$ $r \in \mathbb{C}$

$$L[e^{rx}] = (e^{rx})'' - 5(e^{rx})' + 6e^{rx} =$$

$$= r^2 e^{rx} - 5 r e^{rx} + 6 e^{rx}$$

$$= \underbrace{(r^2 - 5r + 6)}_{p(r)} e^{rx}$$

dove $p(r) = r^2 - 5r + 6$ e' il polinomio caratteristico associato a (3)

$$L[e^{rx}] = 0 \iff p(r) = 0 \qquad r = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

e^{2x}, e^{3x} sono entrambe soluzioni di (3)

Esistono costanti λ e μ t.c. $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ t.c. $\lambda e^{2x} + \mu e^{3x} = 0$. No non esistono.

Questo significa che le funzioni sono linearmente indipendenti

Essendo linearmente indipendenti, formano una base nello spazio delle soluzioni.

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Wronskiano

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{pmatrix} = e^{2x} e^{3x} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= e^{5x}(3-2) = e^{5x}$$

Più in generale per

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$$

e se y_1 e y_2 sono due soluzioni,

$$W = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

risulta che per W si ha la seguente dicotomia e cioè o $W \equiv 0$ dappertutto oppure

$W(x) \neq 0$ $\forall x$. $\qquad y'' = -p(x) y' - p(x) y$

$$\frac{d}{dx} W(x) = \frac{d}{dx} \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\det\begin{pmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{0} + \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ -py_1' - qy_1 & -py_2' - qy_2 \end{pmatrix} =$$

$$= -p \underbrace{\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{W} - q \overbrace{\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}^{0}$$

$$W' = -p(x) W \qquad W' + p(x) W = 0$$

$$W = W_0 e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$W_0 \in \mathbb{C}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$v_1, \dots, v_{10} \in \mathbb{R}^{10}$ vettori colonna

$$\det(v_1, \dots, v_{10})$$

$$\det(v_1, \dots, v_9, \lambda v_{10} + \mu u_{10}) =$$

$$= \lambda \det(v_1, \dots, v_9, v_{10}) + \mu \det(v_1, \dots, v_9, u_{10})$$

u, v, w vettori rigo in $\mathbb{R}^2$

$$\det \begin{pmatrix} u \\ \lambda v + \mu w \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ \lambda v_1 + \mu w_1 & \lambda v_2 + \mu w_2 \end{pmatrix} = u_1(\lambda v_2 + \mu w_2) - u_2(\lambda v_1 + \mu w_1)$$

$$= \lambda (u_1 v_2 - u_2 v_1) + \mu (u_1 w_2 - u_2 w_1)$$

$$= \lambda \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \qquad r = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

$$y'' + by' + cy = 0$$

$$p(r) = r^2 - br + c$$

$$r^2 + br + c = 0$$

$$r_\pm = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

se $r_+ \neq r_-$ ho due soluzioni linearmente indipendenti $e^{r_+ x}$ $e^{r_- x}$

$$y'' + y' - 6y = 0$$

$$r^2 + r - 6 = 0 \qquad r_\pm = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 + 24}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

e^{2x} e^{-3x} lin indi

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

Se $z = x + iy$ è un numero complesso

$$e^z = e^x \, e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$e^0 = 1$

$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 0$

$e^z \neq 0 \quad \forall z$

$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

$\frac{d}{dz} e^z = e^z$ ($\frac{d}{dz}$ analogo di $\frac{d}{dx}$ in ambito complesso)

$y'' + y = 0$

$r^2 + 1 = 0 \qquad r = \pm i$

$e^{ix} \qquad e^{-ix}$

Formule di Euler

dove $\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x & \forall x \in \mathbb{R} \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$y_h = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}$

$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x & \forall x \in \mathbb{R} \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases}$

sommando

$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

sottraendo

$e^{ix} - e^{-ix} = 2 i \sin x \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$\sin x$ e $\cos x$ sono soluzioni di

$y'' + y = 0$

$$\det \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \cos' x & \sin' x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} =$$

$$= \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x$$

Presa una qualsiasi coppia di soluzioni il Wronskiano è costante

$y'' + y = 0 \qquad y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$

$p(x) \equiv 0 \qquad q(x) \equiv 1$

$W' + p(x) W = 0$ in questo caso $p \equiv 0$

$W' = 0$

$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$$y'' + y' + \frac{5}{2} y = 0$$

$$r^2 + r + \frac{5}{2} = 0 \qquad 1-4c$$

$$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-10}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-9}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} i$$

$$y_h = C_1 e^{x\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i\right)} + C_2 e^{x\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} i\right)}$$

$$e^{-\frac{x}{2} + \frac{3}{2} x i} = e^{-\frac{x}{2}} \left(\cos\left(\frac{3}{2} x\right) + i \sin\left(\frac{3}{2} x\right) \right)$$

$$e^{-\frac{x}{2} - \frac{3}{2} x i} = e^{-\frac{x}{2}} \left(\cos\left(\frac{3}{2} x\right) - i \sin\left(\frac{3}{2} x\right) \right)$$

Sommando

$$e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{3}{2} x\right) = \frac{e^{-\frac{x}{2} + \frac{3}{2} x i} + e^{-\frac{x}{2} - \frac{3}{2} x i}}{2} = e^{-\frac{x}{2}} \underbrace{\frac{e^{\frac{3}{2} x i} + e^{-\frac{3}{2} x i}}{2}}_{\cos\left(\frac{3}{2} x\right)}$$

$$e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{3}{2} x\right) = e^{-\frac{x}{2}} \frac{e^{\frac{3}{2} x i} - e^{-\frac{3}{2} x i}}{2i}$$

$e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{3}{2} x\right)$, $e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{3}{2} x\right)$ sono soluzioni

e formano una base di soluzioni

$$y_h = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{3}{2} x\right) + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{3}{2} x\right)$$

più in generale se

$$y'' + b y' + c y = 0 \qquad r^2 + b r + c = 0$$

se $\quad r_\pm = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ con $b^2 - 4c < 0$

se $b, c \in \mathbb{R}$

allora una base di soluzioni è dalle due funzioni

$$e^{-\frac{b}{2} x} \cos\left(\frac{\sqrt{|b^2 - 4c|}}{2} x \right), \quad e^{-\frac{b}{2} x} \sin\left(\frac{\sqrt{|b^2 - 4c|}}{2} x \right)$$

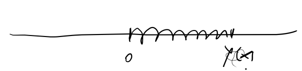
$y'' + y' + \frac{5}{2} y = 0$ modello un oscillatore

$$y'' = -y' - \frac{5}{2} y$$

Posso interpretare questo come una legge di Newton

x è il tempo $y(x)$ è la posizione di un

punto mobile



c'è una molla che collega il $y(x)$ con l'origine

e $-\frac{5}{2} y(x)$ è la forza di attrazione ~~della~~ verso l'origine

della molla.

c'è inoltre una forza di attrito $-y'(x)$

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{3}{2} x\right) + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{3}{2} x\right)$$

Notare che $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$ per ogni scelta di costanti C_1, C_2.