Inferenza Statistica

Esame del 2 luglio 2015

Tempo a disposizione 2 ore.

Tra parentesi quadre i punteggi massimi attribuibili per ciascun quesito (Totale: 36).

1. Sia p la probabilità che un pezzo prodotto sia difettoso. Al fine di verificare l'ipotesi $H_0 : p = .01$ contro $H_1 : p = 0.005$ si controllano 1000 pezzi e si calcola la statistica T=numero di pezzi difettosi. Si decide di rifiutare H_0 se T è minore o uguale a 6.

a. [3] Qual è il livello di significatività del test proposto?

b. [3] Quanto vale la potenza?

c. [3] Quanto vale il p-value se si sono ottenuti 4 pezzi difettosi?

Soluzione

a. Si vuole verificare l'ipotesi $H_0 : p = p_0 = 0.01$ contro $H_1 : p = 0.005$, con $n = 1000$ e regione di rifiuto $R = \{T : T \leq 6\}$. Il livello di significatività del test è dato da

$$\alpha = P(T \in R \,|\, H_0) = P(T \leq 6) \quad \text{dove} \quad T \sim Bin(1000, 0.01)$$

Utilizzando l'approssimazione normale si ha

$$\begin{aligned} P(T \leq 6) \approx & P\left(Z \leq \frac{6 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) \\ = & P\left(Z \leq \frac{6 - 1000 \cdot 0.01}{\sqrt{1000 \cdot 0.01 \cdot (1 - 0.01)}}\right) \\ = & \Phi(-1.27) = 1 - \Phi(1.27) = 0.102. \end{aligned}$$

dove $Z \sim N(0,1)$ e $\Phi(\cdot)$ è la sua funzione di ripartizione.

b. La potenza del test vale

$$\begin{aligned} \pi = & P(T \in R \,|\, H_1) \\ = & P(T \leq 6 \,|\, p = 0.005) \approx P\left(Z \leq \frac{6-5}{\sqrt{4.975}}\right) = \Phi(0.45) = 0.674. \end{aligned}$$

c. Il p-value si calcola come $\gamma = P(T \leq t_{oss} \,|\, H_0)$, dove t_{oss} denota il valore osservato della statistica, nel nostro caso quindi $t_{oss} = 4$. Possiamo scrivere

$$P(T \leq 4 \,|\, p = 0.01) \approx P\left(Z \leq \frac{4 - 10}{\sqrt{9.9}}\right) = \Phi(-1.91) = 1 - \Phi(1.91) = 0.028.$$

2. Sia X una grandezza che nella popolazione è distribuita secondo la legge di densità

$$f(x) = e^{\alpha - x}, \quad x \geq \alpha$$

a. [4] Si derivi lo stimatore di massima verosimiglianza per α se si dispone di un campione i.i.d. di n elementi tratti dalla popolazione.

b. [4] Si dica se valgono le condizioni di regolarità per cui per uno stimatore non distorto di α la varianza dello stimatore è il limite di Rao-Cramér.

Soluzione

a. La funzione di verosimiglianza del campione è

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n; \alpha) = L(\alpha) &= \prod_{i=1}^{n} e^{\alpha - x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x_i) \\
&= e^{(n\alpha - \sum x_i)} \mathbb{I}_{(-\infty, x_{(1)}]}(\alpha),
\end{aligned}
$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x_i)$ è uguale a 1 se e solo se tutti gli $x_1, \ldots, x_n$ sono nell'intervallo $[\alpha, \infty)$, che è vero se e solo se $\alpha \leq x_{(1)} := \min(x_1, \ldots, x_n)$. Il valore che massimizza la funzione di verosimiglianza $L(\alpha)$ è $\hat{\alpha} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, che rappresenta pertanto lo stimatore di massima verosimiglianza per α.

b. Il limite fornito dalla disuguaglianza di Rao-Cramér alla varianza degli stimatori corretti di α dovrebbe essere $1/I(\alpha)$, con $I(\alpha) = nE\left[\left(\frac{d}{d\alpha} \log f(y; \alpha)\right)^2\right]$. Tuttavia, poiché il campo di variabilità di X dipende da α, le condizioni di regolarità per cui vale il limite individuato non sono rispettate.

3. Una concessionaria di vendite d'auto è aperta 365 giorni all'anno. Si assuma che le auto vendute ogni giorno siano determinazioni indipendenti di Poisson di varianza 2. Si denoti con Y il numero di auto vendute in un anno.

a. [3] Si valuti la probabilità che si vendano più di 800 auto in anno.

b. [2] La probabilità che le auto vendute siano fra 700 e 800.

c. [3] Si assuma ora che nei giorni dei 52 weekend si vendano in media il doppio di auto. Si ricalcoli la probabilità di cui al punto **a.**

Soluzione

a. Si ha che $Y \sim Po(365 \cdot 2 = 730)$. La distribuzione di Poisson di parametro ν per ν elevato può essere approssimata da una distribuzione normale di media e varianza ν, quindi, approssimativamente, se Z è distribuita secondo una normale standard, si ha

$$
P(Y > 800) \approx 1 - P\left(Z \leq \frac{800 - 730}{\sqrt{730}}\right) = 1 - \Phi(2.59) = 0.0048.
$$

b. Approssimiamo $P(700 < Y < 800)$ con

$$
P\left(\frac{700 - 730}{\sqrt{730}} \leq Z \leq \frac{800 - 730}{\sqrt{730}}\right) = \Phi(2.59) - \Phi(-1.11) = 0.86
$$

c. Il numero di auto vendute in un anno è la v.a. $Y = Y_1 + Y_2$, dove $Y_1 \sim Po(2 \cdot 61)$ e $Y_2 \sim Po(4 \cdot 104)$, essendo 104 il numero di giorni in 52 weekend. Supponendo Y_1 e Y_2 indipendenti, la v.a. Y ha ancora distribuzione di Poisson di media $\lambda = 2 \cdot 261 + 4 \cdot 104 = 938$, quindi

$$
P(Y > 800) \approx 1 - \Phi\left(\frac{800 - 938}{\sqrt{938}}\right) = 0.999997
$$

4. Si vuole verificare se il consumo di un nuovo motore A è inferiore a quello del vecchio motore B. A tal fine si raccolgono dati sui km percorsi con un litro da entrambi i motori. Per il motore A si ottengono le seguenti 7 osservazioni

22.8 26.0 25.6 24.0 25.3 23.8 24.5

per il motore B si osservano le 11 percorrenze

19.7 40.9 17.2 25.7 40.0 18.1 24.5 16.9 26.8 26.8 42.8

a. [3] Accettereste l'ipotesi, al livello $\alpha = 0.02$, che la media dei km per litro del motore A sia maggiore o uguale di quella del motore B contro l'alternativa che sia inferiore? (si ipotizzi la normalità delle popolazioni dei km percorsi con i due motori e l'uguaglianza delle varianze delle popolazioni dalle quali si estraggono i campioni).

b. [4] Si verifichi l'ipotesi di uguaglianza delle varianze per le popolazioni di km percorsi al livello $\alpha = 0.02$.

c. [4] Qual è la potenza del test di cui al punto **b.** se l'alternativa è $10\sigma_A^2 = \sigma_B^2$?

Soluzione

a. Interessa verificare l'ipotesi $H_0 : \mu_B \leq \mu_A$ contro l'alternativa $H_1 : \mu_B > \mu_A$ (o equivalentemente $H_1 : \mu_B - \mu_A > 0$) che il motore B consumi di meno. Dai dati campionari si ricava

$$\bar{x}_A = 24.57, \;\; s_A^2 = 9.21$$
$$\bar{x}_B = 27.22, \;\; s_B^2 = 94.98$$

Se è vera l'ipotesi nulla, il rapporto

$$T = \frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$

con

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2}}$$

ha distribuzione t di Student con $(n_A + n_B - 2)$ gradi di libertà. Si rifiuterà H_0 se il valore osservato di T appartiene alla regione

$$R = \{t : t \geq t_{16,1-\alpha}\}$$

dove $t_{16,1-\alpha}$ denota il quantile di ordine $1 - \alpha$ della distribuzione t di Student con 16 gradi di libertà. dal campione si calcola la quantità

$$t_{oss} = \frac{27.22 - 24.57}{7.93\sqrt{1/7 + 1/11}} = 0.69$$

ed essendo $0.69 < t_{16,0.98} = 2.24$ l'ipotesi nulla non viene rifiutata al livello del 2%.

b. Denotate con σ_A^2 e σ_B^2 le varianze delle popolazioni di km percorsi con il motore A e B, rispettivamente, occorre verificare $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ contro $H_0 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$ al livello $\alpha = 0.02$. Si calcola quindi il rapporto delle varianze dei due campioni

$$f = \frac{s_B^2}{s_A^2} = \frac{94.98}{9.21} = 10.31$$

e si determinano i quantili $f_{\frac{\alpha}{2}}$, $f_{1-\frac{\alpha}{2}}$ di ordine $\alpha/2$ e $1-\alpha/2$ della distribuzione F di Fisher con $r_1 = 10$ e $r_2 = 6$ gradi di libertà:

$$f_{0.01}(10,6) = \frac{1}{f_{1-0.01}(6,10)} = \frac{1}{7.87} = 0.13 \quad \text{e} \quad f_{0.99}(10,6) = 5.39$$

La regione di rifiuto del test è così definita

$$R = \{(s_1^2, s_2^2) : s_1^2/s_2^2 \notin (0.13, 5.39)\}$$

e poiché il valore osservato della statistica $f = 10.31$ non è nell'intervallo $(0.13, 5.39)$, si rifiuta l'ipotesi nulla di uguaglianza delle varianze.

c. La potenza del test con ipotesi alternativa $10\sigma_A^2 = \sigma_B^2$, è data da

$$P(F \in R \,|\, H_1) = 1 - P(F \in A \,|\, H_1) = 1 - P\left(0.13 < \frac{S_B^2}{S_A^2} < 5.39 \,\middle|\, \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} = 10\right)$$

con

$$F = \frac{S_B^2/\sigma_B^2}{S_A^2/\sigma_A^2} = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}\frac{S_B^2}{S_A^2} = \frac{1}{10}\frac{S_B^2}{S_A^2} \sim F(10,6)$$

Quindi, si ottiene

$$\begin{aligned}\pi = 1 - P\left(0.13 \leq \frac{S_B^2}{S_A^2} \leq 5.39\right) &= 1 - P\left(0.013 \leq \frac{S_B^2}{10S_A^2} \leq 0.539\right)\\ &= F_F(0.013) + P(F \geq 0.539), \quad F \sim F(10,6)\end{aligned}$$

Le tavole della distribuzione F di Fisher forniscono la f.d.r. solo in corrispondenza di alcuni quantili e in questo caso non è possibile determinare il risultato esatto dell'ultima espressione. Tuttavia, si osservi che dalle tavole si ricava il quantile di livello 0.01 di $F(10,6)$ come $1/f_{0.99,6,10} = 1/5.386 \approx 0.2$, per cui $F_F(0.013) \approx 0$; inoltre, poiché il quantile di ordine 0.1 di F si può ottenere come $f_{0.1,10,6} = 1/f_{0.9,6,10} = 1/2.461 = 0.4$, $P(F \geq 0.539)$ sarà un valore elevato ma inferiore a 0.9 (con `R` si trova che tale valore è circa 0.815).