Inferenza Statistica

Esame del 16 febbraio 2017

Tempo a disposizione 2 ore.

Tra parentesi quadre i punteggi massimi attribuibili per ciascun quesito (Totale: 37).

1. Le due agenzie di assicurazione Colonnelli e Alternanz decidono di fondersi. La prima ha raccolto i dati sul numero di sinistri, X, denunciati in un anno dai suoi assicurati. La seconda invece ha registrato per ogni suo assicurato il tempo, Y, fino alla denuncia del primo sinistro. Il numero medio di sinistri X per 123 assicurati è pari a 0.13, mentre il tempo medio Y per i 212 assicurati è 7.2 anni. Assumendo che il numero di sinistri sia descritto da una Poisson di parametro λ per entrambe le compagnie,

   a. [3] si fornisca una stima della probabilità che su 1000 assicurati per la prima compagnia più di 880 non denuncino alcun sinistro in un anno;

   b. [4] si fornisca la stima di massima verosimiglianza per λ, mettendo assieme i dati delle due compagnie;

   c. [4] si verifichi l'ipotesi che nelle due popolazioni sia uguale il numero medio di sinistri per anno ($\alpha = 0.01$).

2. Il numero di battiti cardiaci per minuto nella popolazione di maschi adulti sani, B, è una Gaussiana di media 78 e varianza 64. La pressione diastolica P (in mm di mercurio) nella stessa popolazione è anch'essa una Gaussiana di media 80 e varianza 81. Sia noto che la probabilità che un individuo estratto a caso dalla popolazione abbia battiti superiori a 90 e contemporaneamente pressione superiore a 90 è pari a 0.05.

   a. [3] Si dica se B e P sono variabili indipendenti.

   b. [3] Si consideri ora un campione di 10 individui dalla popolazione. Qual è la probabilità che la media della pressione sia compresa tra 80 e 83?

   c. [3] Quanto grande dovrebbe essere un campione se si vuole che l'evento "il numero medio di battiti non si discosta da 78 di più di 2" abbia probabilità non inferiore a 0.99?

3. Sia $W \sim N(\mu, \sigma^2)$ e Y una variabile aleatoria χ^2 con $\nu = 4$ gradi di libertà.

   a. [3] Sapendo che $\mu = 0$ e $P(W < 1.5) = 0.6$, per quale valore a risulta essere $P(|W| \leq a) = 0.9$?

   b. [3] Si determini b tale che $P(|X| \leq b\sqrt{Y}) = 0.9$, dove $X = \frac{W-\mu}{\sigma}$ ed è noto che X e Y sono variabili aleatorie indipendenti.

   c. [3] Sia $U = \sum_{i=1}^{5} V_i^2$, con V_i, $i = 1, \ldots, 5$, variabili aleatorie indipendenti tali che $V_i \sim N(0, 1)$. Sia U indipendente da X, definita al punto precedente. Quanto vale $P(X > 0.66\sqrt{U})$?

4. Vengono selezionati casualmente 10 studenti che si sono laureati recentemente all'Università $\mathcal{A}$ e viene sottoposto loro un test IQ. I punteggi ottenuti sono 120, 101, 87, 120, 107, 110, 118, 119, 112, 104. Altri 10 studenti da poco laureati vengono selezionati dall'Università $\mathcal{B}$ e anche a loro viene sottoposto il test. I punteggi ottenuti sono 130, 133, 119, 123, 125, 124, 133, 120, 126, 126.

   a. [4] Si costruisca un intervallo di confidenza al 90% per la differenza tra i punteggi medi relativi ai due gruppi. Che assunzioni occorre fare?

   b. [4] Con i dati a disposizione, accettereste l'ipotesi che le varianze dei punteggi nei test IQ per i laureati delle due università siano uguali con $\alpha = 0.1$?