Inferenza Statistica

Esame del 23 gennaio 2020

Tempo a disposizione 2 ore.

Tra parentesi quadre i punteggi massimi attribuibili per ciascun quesito (Totale: 35).

1. Si dispone di un campione i.i.d. di 8 elementi da una popolazione in cui X è distribuita come una Gaussiana di media μ e varianza σ^2.

a. [4] Si consideri il seguente stimatore di σ^2:

$$T = c[(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2 + (X_7 - X_8)^2]$$

Determinare il valore di c per il quale T risulta non distorto.

b. [3] Si immagini di conoscere la media di X e che questa sia pari a 0. Un campione estratto da X ha fornito i seguenti valori $(1.8, -4.3, -5.9, 5.1, 5.8, -2.1, -3.6, -2.0)$. Ottenere un intervallo di confidenza per σ^2 al 95%.

c. [3] Oltre all'informazione sulla media data al punto b. si assuma nota anche la varianza, che è pari a 10; qual è la probabilità che la quantità $\sum_i^8 X_i^2$ sia minore di 73.4?

2. La durata di vita di una componente elettronica è descritta da una legge esponenziale di parametro λ. Vengono osservate in test indipendenti 10 componenti e viene registrato il numero di componenti che hanno cessato di funzionare entro le 100 ore. Per 3 elementi del campione la durata di vita è stata inferiore alle 100 ore, mentre le restanti componenti risultano ancora in funzione.

a. [4] Si ottenga lo stimatore di massima verosimiglianza per λ.

b. [3] Qual è la stima della probabilità che una componente duri più di 80 ore sapendo che non si è rotta nelle prime 60?

3. Sia y_1 una singola osservazione estratta dalla variabile Y che ha densità $f(y) = (2\theta y + 1 - \theta)\boldsymbol{I}_{[0,1]}(y)$, dove $-1 \leq \theta \leq 1$ e $\boldsymbol{I}_{[0,1]}(y)$ denota la funzione che ha valore 1 se $0 \leq y \leq 1$ e 0 altrimenti.

a. [4] Determinare il test più potente al livello α per la verifica dell'ipotesi $H_0 : \theta = 0$ contro l'alternativa $H_1 : \theta = 1$.

b. [4] Per verificare $H_0 : \theta \leq 0$ contro l'alternativa $H_1 : \theta > 0$ viene utilizzato il seguente criterio: si decide di rifiutare H_0 se y_1 è maggiore di $1/2$. Trovare la funzione di potenza e la probabilità dell'errore di I tipo per questo test.

4. Si disponga di due campioni indipendenti di studenti universitari di un ateneo della regione A e di un ateneo della regione B. Il primo campione di studenti dell'ateneo nella regione A è composto da 245 unità, e si osserva che 109 studenti frequentano abitualmente la mensa universitaria. Nel secondo campione dalla regione B, su 203 studenti, 72 usufruiscono abitualmente della mensa.

a. [3] Si verifichi, con $\alpha = 0.05$, se vi è sufficiente evidenza per affermare che gli studenti dell'ateneo nella regione A frequentano in media di più la mensa universitaria.

b. [3] Si calcoli il p-value per il test sopra definito.

c. [4] Ammesso che nella popolazione di studenti dell'ateneo nella regione A sia $p_A = 0.42$ la probabilità di utilizzare abitualmente la mensa, mentre nella regione B tale probabilità sia pari a $p_B = 0.30$, qual è la probabilità dell'errore di seconda specie per il test al punto a. sull'uguaglianza delle proporzioni?