Analisi Matematica II

Appunti delle lezioni tenute dalla Prof.ssa R. Toader

Università di Trieste, CdL Ingegneria Industriale e
CdL Ingegneria Navale

a.a. 2024/2025

Calcolo vettoriale: forme differenziali, campi vettoriali, integrali di linea e di superficie di campi vettoriali

1 Uno strano prodotto

Consideriamo le "proiezioni" in $\mathbb{R}^N$. Come abbiamo già visto, si tratta delle funzioni $p_m : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definite da

$$p_m(x_1, x_2, \dots, x_N) = x_m \,.$$

In questa parte del corso useremo però una notazione diversa: invece di p_m, scriveremo dx_m.

Ad esempio, la nota formula per il differenziale

$$df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) = \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_m}(\boldsymbol{x}_0)\, h_m \,,$$

dove $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ è un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^N$, potrà essere scritta come

$$df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) = \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_m}(\boldsymbol{x}_0)\, dx_m(\boldsymbol{h}) \,,$$

o brevemente come

$$df(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_m}(\boldsymbol{x}_0)\, dx_m \,.$$

Abbiamo qui un primo esempio di quella che chiameremo "forma differenziale".

Introduciamo ora un'operazione tra i dx_m che ha l'aspetto di un prodotto, e che denotiamo con il simbolo $\wedge$. Senza entrare troppo nel merito della questione teorica, ci limiteremo a evidenziarne le proprietà. La principale caratteristica di questo prodotto è di essere antisimmetrico (o alternante): si ha

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \,.$$

Possiamo moltiplicare diverse volte questi oggetti, con la regola generale che, quando si scambiano due di essi, il risultato cambia di segno:

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge dx_j \wedge \cdots \wedge dx_{i_M} = -dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_j \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_{i_M}.$$

Si noti che, se due indici dovessero coincidere, allora

$$dx_{i_1} \wedge \ldots dx_i \ldots dx_i \cdots \wedge dx_{i_M} = 0.$$

Risulta allora chiaro che basterà considerare i prodotti con indici in ordine strettamente crescente, ossia

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_M} \,, \text{ con } 1 \leq i_1 < \cdots < i_M \leq N \,,$$

in quanto tutti gli altri o sono nulli o si possono ricondurre a questi con un riordinamento dei fattori, eventualmente cambiando il segno.

Analizziamo ad esempio il caso $N = 3$. Qui abbiamo dx_1, dx_2 e dx_3. Se prendo due di essi con gli indici in ordine strettamente crescente ottengo

$$dx_1 \wedge dx_2 \,, \quad dx_1 \wedge dx_3 \,, \quad dx_2 \wedge dx_3 \,.$$

Ci sono anche

$$dx_2 \wedge dx_1 = -dx_1 \wedge dx_2 \,, \quad dx_3 \wedge dx_1 = -dx_1 \wedge dx_3 \,, \quad dx_3 \wedge dx_2 = -dx_2 \wedge dx_3 \,,$$

mentre

$$dx_1 \wedge dx_1 = dx_2 \wedge dx_2 = dx_3 \wedge dx_3 = 0 \,.$$

C'è un unico prodotto di tre elementi con indici in ordine strettamente crescente, e cioè

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \,.$$

Per quanto riguarda gli altri prodotti di tre elementi, abbiamo

$$dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 = dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \,,$$

$$dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 = dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 = dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \,,$$

mentre tutti quelli con due o tre indici ripetuti valgono 0.

2 Forme differenziali in $\mathbb{R}^N$

Sia U un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$, e sia $M \geq 1$ un numero naturale.

Chiameremo **forma differenziale di grado** M (o M-forma differenziale) una funzione definita su U da un'espressione del tipo

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_M \leq N} f_{i_1 \ldots i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_M} .$$

Le funzioni $f_{i_1 \ldots i_M} : U \to \mathbb{R}$ sono le "componenti" di ω. Diremo che ω è di classe C^1 se lo sono tutte le sue componenti. Si noti che $\omega(\boldsymbol{x})$ è determinata dal vettore $\binom{N}{M}$-dimensionale

$$F(\boldsymbol{x}) = (f_{i_1 \ldots i_M}(\boldsymbol{x}))_{1 \leq i_1 < \cdots < i_M \leq N} .$$

Chiameremo inoltre 0-forma differenziale una qualunque funzione definita su U a valori in $\mathbb{R}$.

Si può definire la somma di due M-forme differenziali: se ω è come sopra e $\widetilde{\omega}$, anch'essa definita su U, è del tipo

$$\widetilde{\omega}(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_M \leq N} g_{i_1 \ldots i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_M} ,$$

si definisce in modo naturale $\omega + \widetilde{\omega}$ come segue:

$$(\omega + \widetilde{\omega})(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_M \leq N} (f_{i_1 \ldots i_M}(\boldsymbol{x}) + g_{i_1 \ldots i_M}(\boldsymbol{x}))\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_M} .$$

Inoltre, se $c \in \mathbb{R}$, si definisce $c\,\omega$, il prodotto dello scalare c per la M-forma differenziale ω, nel modo seguente:

$$(c\,\omega)(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_M \leq N} c f_{i_1 \ldots i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_M} .$$

Con queste definizioni, l'insieme delle forme differenziali di grado M risulta essere uno spazio vettoriale.

Vediamo da vicino il caso $N = 3$. Consideriamo un sottoinsieme aperto U di $\mathbb{R}^3$. Se indichiamo con ω_M una M-forma differenziale, avremo, nei casi $M = 1, 2, 3$, le seguenti possibilità:

$$\begin{aligned}
&\omega_1(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x})\, dx_1 + f_2(\boldsymbol{x})\, dx_2 + f_3(\boldsymbol{x})\, dx_3 ,\\
&\omega_2(\boldsymbol{x}) = f_{12}(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_2 + f_{13}(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_3 + f_{23}(\boldsymbol{x})\, dx_2 \wedge dx_3 ,\\
&\omega_3(\boldsymbol{x}) = f_{123}(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 .
\end{aligned}$$

Si noti che $\omega_1(\boldsymbol{x})$ e $\omega_2(\boldsymbol{x})$ sono determinate dai vettori tridimensionali $F(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), f_3(\boldsymbol{x}))$ e $G(\boldsymbol{x}) = (f_{12}(\boldsymbol{x}), f_{13}(\boldsymbol{x}), f_{23}(\boldsymbol{x}))$, rispettivamente.

3 Prodotto esterno

Date due forme differenziali ω e $\widetilde{\omega}$, entrambe definite su U, di grado M e $\widetilde{M}$, rispettivamente, vogliamo definire la forma differenziale $\omega \wedge \widetilde{\omega}$, di grado $M+\widetilde{M}$, che si dice **prodotto esterno** di ω e $\widetilde{\omega}$. Se

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_M \le N} f_{i_1 \ldots i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_M}\,,$$

$$\widetilde{\omega}(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_{\widetilde{M}} \le N} g_{j_1 \ldots j_{\widetilde{M}}}(\boldsymbol{x})\, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{\widetilde{M}}}\,,$$

si pone

$$(\omega \wedge \widetilde{\omega})(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_M \le N \\ 1 \le j_1 < \cdots < j_{\widetilde{M}} \le N}} f_{i_1 \ldots i_M}(\boldsymbol{x}) g_{j_1 \ldots j_{\widetilde{M}}}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_M} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{\widetilde{M}}}\,.$$

Di solito si omette il simbolo $\wedge$ qualora una delle due è una 0-forma differenziale, in quanto il prodotto esterno assomiglia, in questo caso, al prodotto per uno scalare. Si noti che nella sommatoria saranno nulli tutti gli elementi in cui un indice compare due volte. Vediamo ora alcune proprietà.

Proposizione. *Se $\omega, \widetilde{\omega}, \widetilde{\widetilde{\omega}}$ sono tre forme differenziali di grado M, $\widetilde{M}$, $\widetilde{\widetilde{M}}$, rispettivamente, allora:*

$$\widetilde{\omega} \wedge \omega = (-1)^{M\widetilde{M}} \omega \wedge \widetilde{\omega}\,,$$

$$(\omega \wedge \widetilde{\omega}) \wedge \widetilde{\widetilde{\omega}} = \omega \wedge (\widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\widetilde{\omega}})\,;$$

se $c \in \mathbb{R}$, allora

$$(c\,\omega) \wedge \widetilde{\omega} = \omega \wedge (c\,\widetilde{\omega}) = c(\omega \wedge \widetilde{\omega})\,;$$

inoltre, nel caso in cui $M = \widetilde{M}$, si ha

$$(\omega + \widetilde{\omega}) \wedge \widetilde{\widetilde{\omega}} = (\omega \wedge \widetilde{\widetilde{\omega}}) + (\widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\widetilde{\omega}})\,,$$

$$\widetilde{\widetilde{\omega}} \wedge (\omega + \widetilde{\omega}) = (\widetilde{\widetilde{\omega}} \wedge \omega) + (\widetilde{\widetilde{\omega}} \wedge \widetilde{\omega})\,.$$

Nel caso $N = 3$, se ω_1 e $\widetilde{\omega}_1$ sono due 1-forme differenziali,

$$\begin{aligned} \omega_1(\boldsymbol{x}) &= f_1(\boldsymbol{x})\, dx_1 + f_2(\boldsymbol{x})\, dx_2 + f_3(\boldsymbol{x})\, dx_3\,, \\ \widetilde{\omega}_1(\boldsymbol{x}) &= g_1(\boldsymbol{x})\, dx_1 + g_2(\boldsymbol{x})\, dx_2 + g_3(\boldsymbol{x})\, dx_3\,, \end{aligned}$$

individuate dai due campi di vettori

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}) &= (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), f_3(\boldsymbol{x}))\,, \\ G(\boldsymbol{x}) &= (g_1(\boldsymbol{x}), g_2(\boldsymbol{x}), g_3(\boldsymbol{x}))\,, \end{aligned}$$

con qualche calcolo si ottiene:

$$\begin{aligned}(\omega_1 \wedge \widetilde{\omega}_1)(\boldsymbol{x}) = &(f_1(\boldsymbol{x})g_2(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x})g_1(\boldsymbol{x}))\, dx_1 \wedge dx_2 \\ &+(f_1(\boldsymbol{x})g_3(\boldsymbol{x}) - f_3(\boldsymbol{x})g_1(\boldsymbol{x}))\, dx_1 \wedge dx_3 \\ &+(f_2(\boldsymbol{x})g_3(\boldsymbol{x}) - f_3(\boldsymbol{x})g_2(\boldsymbol{x}))\, dx_2 \wedge dx_3\,.\end{aligned}$$

Se invece ω_1 è una 1-forma differenziale e $\widetilde{\omega}_2$ è una 2-forma differenziale,

$$\begin{aligned}\omega_1(\boldsymbol{x}) &= f_1(\boldsymbol{x})dx_1 + f_2(\boldsymbol{x})dx_2 + f_3(\boldsymbol{x})dx_3\,, \\ \widetilde{\omega}_2(\boldsymbol{x}) &= g_{12}(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_2 + g_{13}(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_3 + g_{23}(\boldsymbol{x})\, dx_2 \wedge dx_3\,,\end{aligned}$$

si ha:

$$(\omega_1 \wedge \widetilde{\omega}_2)(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x})g_{23}(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x})g_{13}(\boldsymbol{x}) + f_3(\boldsymbol{x})g_{12}(\boldsymbol{x}))\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\,.$$

Osserviamo adesso che una scelta più opportuna dell'ordine dei prodotti a due a due dei dx_1, dx_2, dx_3 risulta essere questa:

$$dx_2 \wedge dx_3\,, \quad dx_3 \wedge dx_1\,, \quad dx_1 \wedge dx_2\,.$$

Infatti, se rivediamo le operazioni fatte sopra con questa nuova scelta, si ha

$$\begin{aligned}(\omega_1 \wedge \widetilde{\omega}_1)(\boldsymbol{x}) = &(f_2(\boldsymbol{x})g_3(\boldsymbol{x}) - f_3(\boldsymbol{x})g_2(\boldsymbol{x}))\, dx_2 \wedge dx_3 \\ &+(f_3(\boldsymbol{x})g_1(\boldsymbol{x}) - f_1(\boldsymbol{x})g_3(\boldsymbol{x}))\, dx_3 \wedge dx_1 \\ &+(f_1(\boldsymbol{x})g_2(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x})g_1(\boldsymbol{x}))\, dx_1 \wedge dx_2\,,\end{aligned}$$

che è la 2-forma differenziale individuata dal campo di vettori

$$F \times G = \big(f_2g_3 - f_3g_2\,, f_3g_1 - f_1g_3\,, f_1g_2 - f_2g_1\big)\,,$$

il *prodotto vettoriale* tra di due campi di vettori F e G. Inoltre, con la nuova scelta, riscrivendo la 2-forma $\widetilde{\omega}_2$ come

$$\widetilde{\omega}_2(\boldsymbol{x}) = \tilde{g}_1(\boldsymbol{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + \tilde{g}_2(\boldsymbol{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + \tilde{g}_3(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_2\,,$$

con campo di vettori associato

$$\widetilde{G}(\boldsymbol{x}) = (\tilde{g}_1(\boldsymbol{x}), \tilde{g}_2(\boldsymbol{x}), \tilde{g}_3(\boldsymbol{x}))\,,$$

abbiamo che

$$(\omega_1 \wedge \widetilde{\omega}_2)(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x})\tilde{g}_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})\tilde{g}_2(\boldsymbol{x}) + f_3(\boldsymbol{x})\tilde{g}_3(\boldsymbol{x}))\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\,,$$

che è la 3-forma differenziale individuata dalla funzione

$$F \cdot \widetilde{G} = f_1\tilde{g}_1 + f_2\tilde{g}_2 + f_3\tilde{g}_3\,,$$

il *prodotto scalare* tra di due campi di vettori F e $\widetilde{G}$.

4 Differenziale esterno

Data una M-forma differenziale ω di classe C^1, vogliamo definire la forma differenziale $d_{ex}\omega$, di grado $M+1$, che si dice **differenziale esterno** di ω.

Se ω è una 0-forma differenziale, $\omega = f : U \to \mathbb{R}$, il suo differenziale esterno $d_{ex}\omega(\boldsymbol{x})$ non sarà altro che il differenziale

$$df(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_m}(\boldsymbol{x})\, dx_m\,.$$

Nel caso generale, se

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_M\le N} f_{i_1\ldots i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_M}\,,$$

poniamo

$$d_{ex}\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_M\le N} df_{i_1\ldots i_M}(\boldsymbol{x})\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_M}\,,$$

o, equivalentemente,

$$d_{ex}\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_M\le N}\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial f_{i_1\ldots i_M}}{\partial x_m}(\boldsymbol{x})\, dx_m\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_M}\,.$$

Nel seguito, per comodità di scrittura, scriveremo sempre $d\omega$ al posto di $d_{ex}\omega$. Vediamo alcune proprietà del differenziale esterno.

Proposizione. *Se ω e $\tilde\omega$ sono due forme differenziali di classe C^1, di grado M e $\tilde M$, rispettivamente, si ha:*

$$d(\omega\wedge\tilde\omega) = d\omega\wedge\tilde\omega + (-1)^M\omega\wedge d\tilde\omega\,;$$

se $M=\tilde M$ e $c\in\mathbb{R}$, allora

$$d(\omega+\tilde\omega) = d\omega + d\tilde\omega\,,$$

$$d(c\,\omega) = c\,d\omega\,;$$

se ω è di classe C^2, allora

$$d(d\omega) = 0\,.$$

Per quanto riguarda l'ultima uguaglianza, abbiamo:

$$d(d\omega)(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_M\le N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f_{i_1\ldots i_M}}{\partial x_m}(\boldsymbol{x})\, dx_{k,m,i_1,\ldots,i_M}\,.$$

Tenuto conto che

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f_{i_1\ldots i_M}}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial f_{i_1\ldots i_M}}{\partial x_k}$$

e del fatto che $dx_k\wedge dx_m = -dx_m\wedge dx_k$, si vede che gli addendi delle sommatorie si eliminano a due a due, per cui si ha $d(d\omega)(\boldsymbol{x}) = 0$.

Nel caso $N = 3$, se abbiamo una 0-forma differenziale $\omega_0 = f : U \to \mathbb{R}$, allora

$$d\omega_0(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\, dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})\, dx_3\,.$$

Si tratta della 1-forma differenziale individuata dal campo di vettori gradiente

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_3}\right).$$

Partendo da una 1-forma differenziale

$$\omega_1(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x})\, dx_1 + f_2(\boldsymbol{x})\, dx_2 + f_3(\boldsymbol{x})\, dx_3\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} d\omega_1(\boldsymbol{x}) = &\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})\right) dx_2 \wedge dx_3 \\ &+ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\right) dx_3 \wedge dx_1 \\ &+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\right) dx_1 \wedge dx_2\,. \end{aligned}$$

Se denotiamo con $F = (f_1, f_2, f_3)$ il campo di vettori individuato da ω_1, ponendo

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\,,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\,,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right),$$

detto "rotore" di F, otteniamo il campo di vettori individuato da $d\omega_1$.

Partendo invece da una 2-forma differenziale

$$\omega_2(\boldsymbol{x}) = g_1(\boldsymbol{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + g_2(\boldsymbol{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + g_3(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_2\,,$$

si ha

$$d\omega_2(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial g_3}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\,.$$

Se $G = (g_1, g_2, g_3)$ denota il campo di vettori individuato da ω_2, ponendo

$$\nabla \cdot G = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3}\,,$$

detta "divergenza" di G, abbiamo la funzione individuata da $d\omega_2$.

Le proprietà del prodotto esterno e del differenziale esterno permettono di dimostrare alcune formule in cui appaiono il gradiente, il rotore o la divergenza.

Se $f : U \to \mathbb{R}$, $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$, $F : U \to \mathbb{R}^3$ e $G : U \to \mathbb{R}^3$, abbiamo ad esempio le seguenti:

$$\begin{aligned}
&\nabla \times (\nabla f) = 0\,,\\
&\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0\,,\\
&\nabla(f\tilde{f}) = \tilde{f}(\nabla f) + f(\nabla \tilde{f})\,,\\
&\nabla \times (fF) = (\nabla f) \times F + f(\nabla \times F)\,,\\
&\nabla \cdot (fG) = (\nabla f) \cdot G + f(\nabla \cdot G)\,,\\
&\nabla \cdot (F \times G) = (\nabla \times F) \cdot G - F \cdot (\nabla \times G)\,.
\end{aligned}$$

Esercizi risolti

1. Scrivere il prodotto esterno delle 1-forme differenziali in $\mathbb{R}^3$:

$$\omega_1(x,y,z) = (x+y)dx+xzdy+zdz \quad \text{e} \quad \omega_2(x,y,z) = (x-y)dx+(x-z)dy+zdz\,.$$

Calcolare il prodotto vettoriale dei campi vettoriali associati.
Soluzione: Si ha

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge \omega_2 &= ((x+y)dx + xzdy + zdz) \wedge ((x-y)dx + (x-z)dy + zdz) =\\
&= (x+y)(x-y)dx \wedge dx + (x+y)(x-z)dx \wedge dy + (x+y)zdx \wedge dz\\
&\quad +xz(x-y)dy \wedge dx + xz(x-z)dy \wedge dy + xz^2dy \wedge dz\\
&\quad +z(x-y)dz \wedge dx + z(x-z)dz \wedge dy + z^2dz \wedge dz\\
&= \big(xz^2 - z(x-z)\big)dy \wedge dz + \big(-(x+y)z + z(x-y)\big)dz \wedge dx\\
&\quad +\big((x+y)(x-z) - xz(x-y)\big)dx \wedge dy\\
&= (xz^2 - xz + z^2)dy \wedge dz - 2yzdz \wedge dx + (x^2 - xz + xy - yz - x^2z + xyz)dx \wedge dy\,.
\end{aligned}$$

Sia $F(x,y,z) = (x+y, xz, z)$ il campo vettoriale associato a ω_1 e sia $G(x,y,z) = (x-y, x-z, z)$ il campo vettoriale associato a ω_2. Allora

$$\begin{aligned}
(F \times G)(x,y,z) &= (xz^2 - z(x-z), z(x-y) - z(x+y), (x+y)(x-z) - xz(x-y))\\
&= (xz^2 - xz + z^2, -2yz, (x^2 - xz + xy - yz - x^2z + xyz)\,,
\end{aligned}$$

che è uguale al campo vettoriale associato alla 2-forma $\omega_1 \wedge \omega_2$.

2. Calcolare il differenziale esterno della 1-forma $\omega(x,y) = x^2ydx + y^3dy$.
Soluzione: La 1-forma differenziale data è di classe C^1 quindi il suo differenziale esterno è ben definito ed è la seguente 2-forma differenziale:

$$\begin{aligned}
d\omega(x,y) &= d(x^2y) \wedge dx + d(y^3) \wedge dy\\
&= 2xydx \wedge dx + x^2dy \wedge dx + 3y^2dy \wedge dy\\
&= -x^2dx \wedge dy\,.
\end{aligned}$$

3. Calcolare il differenziale esterno della seguente 2-forma in $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(x,y,z) = x^2 y dy \wedge dz + (x-z) dz \wedge dx + e^{xyz} dx \wedge dy\,.$$

Soluzione: la forma differenziale data è di classe C^1 quindi il suo differenziale esterno è ben definito ed è la seguente 3-forma differenziale

$$d\omega(x,y,z) = xy(2 + e^{xyz}) dx \wedge dy \wedge dz\,.$$

Una bella presentazione video di 3Blue1Brown sull'interpretazione fisica degli operatori rotore e divergenza si trova al link:

https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE

5 Forme differenziali chiuse ed esatte

Ci interessiamo ora al problema di trovare in quali casi una forma differenziale data possa essere scritta come il differenziale esterno di una forma differenziale da determinarsi. In questa sezione, supporremo $M \geq 1$.

Definizione. *Una M-forma differenziale ω si dice* **chiusa** *se $d\omega = 0$; si dice* **esatta** *se esiste una $(M-1)$-forma differenziale $\tilde{\omega}$ tale che $d\tilde{\omega} = \omega$.*

Ogni forma differenziale esatta è chiusa: se $\omega = d\tilde{\omega}$, allora $d\omega = d(d\tilde{\omega}) = 0$. Il viceversa non sempre è vero.

Esempio. La 1-forma differenziale definita su $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ da

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

è chiusa, come facilmente si verifica: ponendo

$$F_1(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,, \qquad F_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,,$$

per ogni $(x,y) \neq (0,0)$, si ha

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\,.$$

Supponiamo per assurdo che ω sia esatta, cioè che esista una funzione $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ tale che $F = (F_1, F_2) = \nabla f$. Consideriamo la curva $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$. Si ha $\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t)$. Calcoliamo il seguente integrale (vedremo nella prossima sezione che si tratta dell'integrale di linea $\int_\sigma F \cdot d\ell$ del campo di vettori $F = (F_1, F_2)$ su σ).

$$\int_0^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt = 2\pi\,.$$

D'altra parte, essendo $\sigma(0) = \sigma(2\pi)$, si avrebbe:

$$\int_0^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = f(\sigma(2\pi)) - f(\sigma(0)) = 0\,,$$

in contraddizione con quanto sopra. Quindi ω non può essere esatta.

La situazione descritta nell'esempio precedente non può verificarsi se, ad esempio, l'insieme U su cui è definita la forma differenziale è un aperto stellato rispetto ad un punto $\bar{\boldsymbol{x}}$, cioè contiene, per ogni suo punto $\boldsymbol{x}$, tutto il segmento che congiunge $\boldsymbol{x}$ a $\bar{\boldsymbol{x}}$. Vale infatti il seguente **teorema di Poincaré**:

Teorema. *Sia U un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$ stellato rispetto ad un punto $\bar{\boldsymbol{x}}$. Per $1 \leq M \leq N$, una M-forma differenziale di classe C^1 definita su U è esatta se e solo se essa è chiusa.*

Consideriamo alcuni corollari che si ottengono nel caso $N = 3$. Per semplificare la scrittura, supporremo senza perdita di generalità $\bar{\boldsymbol{x}} = (0, 0, 0)$.

Il caso $M = 1$. Un campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$, di classe C^1, definito su un sottoinsieme aperto U di $\mathbb{R}^3$, determina una 1-forma differenziale

$$\omega(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x})\, dx_1 + F_2(\boldsymbol{x})\, dx_2 + F_3(\boldsymbol{x})\, dx_3\,.$$

Essa è chiusa se e solo se $\nabla \times F = 0$. In questo caso, il campo di vettori si dice **irrotazionale**. Diremo invece che il campo di vettori F è **conservativo** se esiste una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ tale che $F = \nabla f$. In tal caso f è detta **potenziale scalare** del campo F. [1]

Teorema. *Se U è stellato rispetto all'origine, si ha che il campo di vettori $F : U \to \mathbb{R}^3$ è conservativo se e solo se esso è irrotazionale.*

Si può dimostrare che in tal caso una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ tale che $F = \nabla f$ è data da:

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 F(t\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x}\, dt\,.$$

Ogni altra funzione $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ tale che $F = \nabla \tilde{f}$ si ottiene da f aggiungendo una costante.

Il caso $M = 2$. Un campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$, di classe C^1, definito su un sottoinsieme aperto U di $\mathbb{R}^3$, determina una 2-forma differenziale

$$\omega(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + F_2(\boldsymbol{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + F_3(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_2\,.$$

Essa è chiusa se e solo se $\nabla \cdot F = 0$. In questo caso, il campo di vettori si dice **solenoidale**. Si dice che F ha un **potenziale vettore** se esiste un campo di vettori $V = (V_1, V_2, V_3)$ tale che $F = \nabla \times V$.

Teorema. *Se U è stellato rispetto all'origine, si ha che il campo di vettori $F : U \to \mathbb{R}^3$ ha un potenziale vettore se e solo se esso è solenoidale.*

Si può dimostrare che in tal caso un campo di vettori $V : U \to \mathbb{R}^3$ tale che $F = \nabla \times V$ è dato da

$$V(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 t(F(t\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{x})\, dt\,.$$

Ogni altro campo di vettori $\widetilde{V} : U \to \mathbb{R}^3$ tale che $F = \nabla \times \widetilde{V}$ si ottiene da V aggiungendo il gradiente di una qualsiasi funzione scalare.

[1] In meccanica spesso è la funzione $-f$ a chiamarsi "potenziale".

Il caso $M = 3$. Una funzione scalare f, di classe C^1, definita su un sottoinsieme aperto U di $\mathbb{R}^3$, determina una 3-forma differenziale

$$\omega(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\,.$$

Essa è sempre chiusa, essendo $d\omega$ una 4-forma differenziale definita su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$.

Teorema. *Se U è stellato rispetto all'origine, una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ è sempre della forma $f = \nabla \cdot W$.*

Si può dimostrare che un campo di vettori $W : U \to \mathbb{R}^3$ con questa proprietà è dato da

$$W(\boldsymbol{x}) = \left(\int_0^1 t^2 f(t\boldsymbol{x})\, dt \right) \boldsymbol{x}\,.$$

Ogni altro campo di vettori $\widetilde{W} : U \to \mathbb{R}^3$ tale che $F = \nabla \cdot \widetilde{W}$ si ottiene da W aggiungendo il rotore di un qualsiasi campo di vettori.

6 Integrale di una forma differenziale

Vogliamo ora definire la nozione di integrale di una M-forma differenziale su una M-superficie. Supponiamo di avere una M-forma differenziale

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_M \le N} f_{i_1 \ldots i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_M}\,,$$

definita su un sottoinsieme U di $\mathbb{R}^N$ contenente il supporto di una M-superficie $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$, con $1 \le M \le N$.

Si ricordi che $\omega(\boldsymbol{x})$ è determinata dal vettore $\binom{N}{M}$-dimensionale

$$F(\boldsymbol{x}) = \left(f_{i_1 \ldots i_M}(\boldsymbol{x})\right)_{1 \le i_1 < \cdots < i_M \le N}\,.$$

Inoltre, per ogni $\boldsymbol{u} \in I$, abbiamo definito il vettore $\binom{N}{M}$-dimensionale

$$\Sigma(\boldsymbol{u}) = \left(\det \sigma'_{(i_1,\ldots,i_M)}(\boldsymbol{u})\right)_{1 \le i_1 < \cdots < i_M \le N}\,.$$

Definizione. *Diremo che la M-forma differenziale ω è integrabile sulla M-superficie $\sigma : I \to U$ se $(F \circ \sigma) \cdot \Sigma$ è integrabile su I. In tal caso, si pone*

$$\int_\sigma \omega = \int_I F(\sigma(\boldsymbol{u})) \cdot \Sigma(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u}\,.$$

Ad esempio, ω sarà integrabile su σ qualora tutte le sue componenti siano funzioni continue.

Vediamo il significato della definizione data quando $N = 3$. Se $M = 1$, $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ è una curva e ω è una 1-forma differenziale:

$$\omega(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x})\, dx_1 + F_2(\boldsymbol{x})\, dx_2 + F_3(\boldsymbol{x})\, dx_3\,.$$

Si ha:

$$\int_\sigma \omega = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt\,.$$

Questa quantità si chiama **integrale di linea** [2] del campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$ lungo la curva σ, e si indica con il simbolo

$$\int_\sigma F \cdot d\ell\,.$$

Esempio. Calcoliamo l'integrale di linea del campo $F(x, y, z) = (-y, x, z^2)$ lungo la curva $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Si ha:

$$\int_\sigma F \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} [(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + t^2]\, dt = 2\pi + \frac{8\pi^3}{3}\,.$$

Se $M = 2$, $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$ è una superficie e ω è una 2-forma differenziale:

$$\omega(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + F_2(\boldsymbol{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + F_3(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_2\,.$$

Si trova:

$$\int_\sigma \omega = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} F(\sigma(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right) du\, dv\,.$$

Questa quantità si chiama **integrale di superficie** o **flusso** [3] del campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$ attraverso la superficie σ, e si indica con il simbolo

$$\int_\sigma F \cdot dS\,.$$

Esempio. Calcoliamo il flusso del campo $F(x, y, z) = (-y, x, z^2)$ attraverso la superficie $\sigma : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(u, v) = (u^2, v, u + v)$. Si ha:

$$\int_\sigma F \cdot dS = \int_0^1 \int_0^1 [(-v)(-1) + u^2(-2u) + (u + v)^2(2u)]\, du\, dv = \frac{3}{2}\,.$$

È importante vedere come cambia l'integrale di una forma differenziale ω su due M-superfici equivalenti. Ricordiamo che $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\sigma} : J \to \mathbb{R}^N$ sono equivalenti se hanno lo stesso supporto ed esistono due insiemi aperti $A \subseteq I$, $B \subseteq J$, e un diffeomorfismo $\varphi : A \to B$ con le seguenti proprietà: gli insiemi $I \backslash A$ e $J \backslash B$ sono trascurabili e, per ogni $\boldsymbol{u} \in A$, $\sigma(\boldsymbol{u}) = \tilde{\sigma}(\varphi(\boldsymbol{u}))$.

[2] In meccanica si usa questo concetto, ad esempio, per definire il **lavoro** di una particella che descrive una curva in un campo di forze.

[3] In fluidodinamica si usa questo concetto, ad esempio, per definire la quantità di fluido che attraversa una superficie in un'unità di tempo.

Diremo che σ e $\tilde{\sigma}$ hanno la **stessa orientazione** se $\det \varphi'(\boldsymbol{u}) > 0$ per ogni $\boldsymbol{u} \in A$; diremo che hanno **orientazione opposta** se $\det \varphi'(\boldsymbol{u}) < 0$ per ogni $\boldsymbol{u} \in A$.

Esempi. Data una curva $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$, una curva ad essa equivalente con orientazione opposta è, ad esempio, $\tilde{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ definita da

$$\tilde{\sigma}(t) = \sigma(a + b - t)\,.$$

Se σ è regolare, un esempio interessante di curva equivalente con la stessa orientazione si ottiene considerando la funzione

$$\varphi(t) = \int_a^t ||\sigma'(r)||\, dr\,.$$

Siccome $\varphi'(t) = ||\sigma'(t)|| > 0$ per ogni $t \in]a, b[$, ponendo $\iota_1 = \varphi(b)$, si ha che $\varphi : [a, b] \to [0, \iota_1]$ è biietiva e la curva $\sigma_1(s) = \sigma(\varphi^{-1}(s))$ è equivalente a σ. Si noti che, per ogni $s \in]0, \iota_1[$, si ha

$$\begin{aligned} ||\sigma_1'(s)|| &= ||\sigma'(\varphi^{-1}(s))(\varphi^{-1})'(s)|| \\ &= \left\| \sigma'(\varphi^{-1}(s)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} \right\| \\ &= \left\| \sigma'(\varphi^{-1}(s)) \frac{1}{||\sigma'(\varphi^{-1}(s))||} \right\| = 1\,. \end{aligned}$$

Data una superficie $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$, una superficie ad essa equivalente con orientazione opposta è, ad esempio, $\tilde{\sigma} : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\tilde{\sigma}(u, v) = \sigma(u, a_2 + b_2 - v)\,,$$

oppure da

$$\tilde{\sigma}(u, v) = \sigma(a_1 + b_1 - u, v)\,.$$

Teorema. *Siano $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\sigma} : J \to \mathbb{R}^N$ due M-superfici equivalenti. Se hanno la stessa orientazione, allora*

$$\int_\sigma \omega = \int_{\tilde{\sigma}} \omega\,;$$

se hanno orientazione opposta, allora

$$\int_\sigma \omega = -\int_{\tilde{\sigma}} \omega\,.$$

Dimostrazione. Abbiamo una M-forma differenziale del tipo

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_M \le N} f_{i_1 \ldots i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_M}\,.$$

Sia $\varphi : A \to B$, come nella definizione di M-superfici equivalenti, tale che $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Per il teorema di cambiamento di variabili nell'integrale, si ha:

$$\begin{aligned}\int_\sigma \omega &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_M\le N} \int_A f_{i_1\dots i_M}(\tilde{\sigma}(\varphi(\boldsymbol{u}))) \det(\tilde{\sigma}\circ\varphi)'_{(i_1,\dots,i_M)}(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u} \\ &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_M\le N} \int_A f_{i_1\dots i_M}(\tilde{\sigma}(\varphi(\boldsymbol{u}))) \det \tilde{\sigma}'_{(i_1,\dots,i_M)}(\varphi(\boldsymbol{u})) \det \varphi'(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u} \\ &= \pm \sum_{1\le i_1<\cdots<i_M\le N} \int_B f_{i_1\dots i_M}(\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v})) \det \tilde{\sigma}'_{(i_1,\dots,i_M)}(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} \\ &= \pm \int_{\tilde{\sigma}} \omega\,,\end{aligned}$$

con segno positivo se $\det \varphi' > 0$, negativo se $\det \varphi' < 0$. ∎

Nota. In generale, se σ e $\tilde{\sigma}$ sono equivalenti, non sempre si ha l'uguaglianza $|\int_\sigma \omega| = |\int_{\tilde{\sigma}} \omega|$. Non è detto infatti che esse abbiano la stessa orientazione od orientazione opposta.

Ad esempio, se consideriamo le due superfici $\sigma, \tilde{\sigma} : [1,2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definite da

$$\begin{aligned}&\sigma(u,v) = \\ &\left(\left(\frac{3}{2} + \left(u - \frac{3}{2}\right)\cos\frac{v}{2}\right)\cos v, \left(\frac{3}{2} + \left(u - \frac{3}{2}\right)\cos\frac{v}{2}\right)\sin v, \left(u - \frac{3}{2}\right)\sin\frac{v}{2}\right), \\ &\tilde{\sigma}(u,v) = \sigma\left(u, v + \frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

si può vedere che sono entrambe parametrizzazioni dello stesso insieme (un nastro di Möbius) e pertanto sono equivalenti (per esercizio si scriva esplicitamente un diffeomorfismo $\varphi : A \to B$ con le proprietà della definizione). D'altra parte, se consideriamo la 2-forma differenziale $\omega(x_1, x_2, x_3) = dx_1 \wedge dx_2$, determinata dal campo di vettori costante $(0, 0, 1)$, facendo i conti si ottiene

$$\int_\sigma \omega = 0\,, \quad \int_{\tilde{\sigma}} \omega = -3\sqrt{2}\,.$$

Consideriamo ora il caso importante in cui $M = N$.

Teorema. *Sia $M = N$; se $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ è regolare con $\det J\sigma(\boldsymbol{u}) > 0$ per ogni $\boldsymbol{u} \in \mathring{I}$ e ω è della forma*

$$\omega(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N\,,$$

allora $\int_\sigma \omega = \int_\sigma f$. Se inoltre σ è iniettiva su $\mathring{I}$, allora $\int_\sigma \omega = \int_{\sigma(I)} f$.

Dimostrazione. Essendo $\det \sigma' > 0$, si ha

$$\begin{aligned}\int_\sigma \omega &= \int_I f(\sigma(\boldsymbol{u}))\det(\sigma'(\boldsymbol{u}))\, d\boldsymbol{u} \\ &= \int_I f(\sigma(\boldsymbol{u}))\,|\det(\sigma'(\boldsymbol{u}))|\, d\boldsymbol{u} = \int_{\sigma(I)} f\,.\end{aligned}$$

Se inoltre σ è iniettiva su $\mathring{I}$, facendo uso del teorema del diffeomorfismo locale, si vede che σ induce un diffeomorfismo tra $\mathring{I}$ e $\sigma(\mathring{I})$. Essendo trascurabili sia la frontiera di I che la sua l'immagine attraverso l'applicazione σ, tenendo conto del teorema di cambiamento di variabili abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_\sigma \omega &= \int_I f(\sigma(\boldsymbol{u}))\det(\sigma'(\boldsymbol{u}))\,d\boldsymbol{u}\\ &= \int_{\mathring{I}} f(\sigma(\boldsymbol{u}))\,|\det(\sigma'(\boldsymbol{u}))|\,d\boldsymbol{u} = \int_{\sigma(\mathring{I})} f = \int_{\sigma(I)} f\,,\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ∎

Se σ è la funzione identità, si ha che $\sigma(I) = I$ e al posto di $\int_\sigma \omega$ si userà scrivere $\int_I \omega$.

7 Incollamenti: il bordo orientato di un rettangolo

Supponiamo che $\sigma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^N, \ldots, \sigma_n : I_n \to \mathbb{R}^N$ siano delle M-superfici. Chiamiamo "incollamento" di $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ la n-upla

$$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\,.$$

Si tratta di un insieme i cui elementi potrebbero non essere tutti distinti tra loro: potrebbe essere che $\sigma_i = \sigma_j$ per alcuni indici $i \neq j$.

Definiamo ora l'integrale di una M-forma differenziale ω sull'incollamento delle suddette M-superfici ponendo

$$\int_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} \omega = \int_{\sigma_1} \omega + \cdots + \int_{\sigma_n} \omega\,.$$

Supponiamo ora che I sia un rettangolo in $\mathbb{R}^{M+1}$, con $M \geq 1$:

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{M+1}, b_{M+1}]\,.$$

Denotiamo con I_k il rettangolo di $\mathbb{R}^M$ ottenuto da I sopprimendo la k-esima componente:

$$I_k = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \cdots \times [a_{M+1}, b_{M+1}]\,.$$

Consideriamo, per ogni k, le M-superfici $\alpha_k^+, \beta_k^+ : I_k \to \mathbb{R}^{M+1}$ definite da

$$\begin{aligned}\alpha_k^+(u_1, \ldots, \widehat{u_k}, .., u_{M+1}) &= (u_1, \ldots, u_{k-1}, a_k, u_{k+1}, \ldots, u_{M+1})\,,\\ \beta_k^+(u_1, \ldots, \widehat{u_k}, .., u_{M+1}) &= (u_1, \ldots, u_{k-1}, b_k, u_{k+1}, \ldots, u_{M+1})\,,\end{aligned}$$

dove il simbolo $\widehat{\ }$ sta ad indicare la soppressione della variabile sottostante. Consideriamo inoltre delle M-superfici $\alpha_k^-, \beta_k^- : I_k \to \mathbb{R}^{M+1}$, equivalenti a α_k^+ e β_k^+, rispettivamente, con orientazione opposta. (Stiamo qui considerando la situazione in cui $N = M + 1$.)

Definizione. *Chiamiamo* **bordo orientato** *del rettangolo I un incollamento delle seguenti M-superfici:*

(a) α_k^- e β_k^+ se k è dispari,
(b) α_k^+ e β_k^- se k è pari,

con $k = 1, \ldots, M+1$.

Se ω è una M-forma differenziale definita su un sottoinsieme U di $\mathbb{R}^{M+1}$ contenente l'immagine di ∂I, avremo quindi:

$$\begin{aligned}\int_{\partial I} \omega &= \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^k \int_{\alpha_k^+} \omega + \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \int_{\beta_k^+} \omega \\ &= \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \left(\int_{\beta_k^+} \omega - \int_{\alpha_k^+} \omega \right).\end{aligned}$$

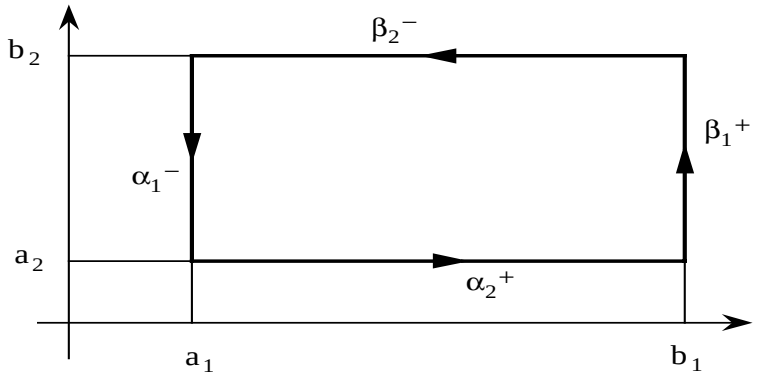
Se $M = 1$, consideriamo il rettangolo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Allora, ad esempio:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^- &: [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad v \mapsto (a_1, a_2 + b_2 - v) \\
\beta_1^+ &: [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad v \mapsto (b_1, v) \\
\alpha_2^+ &: [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad u \mapsto (u, a_2) \\
\beta_2^- &: [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad u \mapsto (a_1 + b_1 - u, b_2) \,.
\end{aligned}$$

Si può visualizzare il bordo orientato

$$\partial I = (\alpha_1^-, \beta_1^+, \alpha_2^+, \beta_2^-)$$

come incollamento dei lati del rettangolo I orientati in modo che il perimetro sia percorso in senso antiorario.



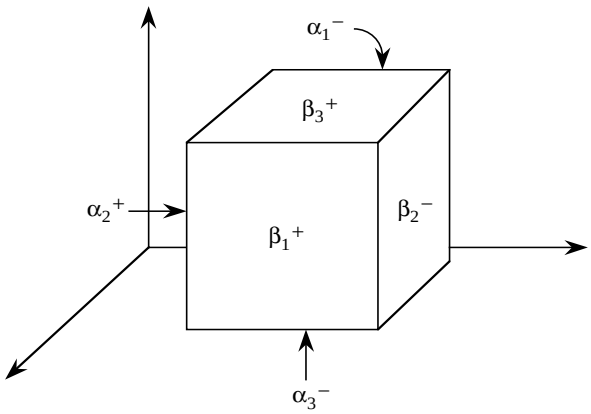
Se $M = 2$, abbiamo, ad esempio:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^- &: [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}^3 \,, \quad (v, w) \mapsto (a_1, a_2 + b_2 - v, w) \\
\beta_1^+ &: [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}^3 \,, \quad (v, w) \mapsto (b_1, v, w) \\
\alpha_2^+ &: [a_1, b_1] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}^3 \,, \quad (u, w) \mapsto (u, a_2, w) \\
\beta_2^- &: [a_1, b_1] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}^3 \,, \quad (u, w) \mapsto (u, b_2, a_3 + b_3 - w) \\
\alpha_3^- &: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3 \,, \quad (u, v) \mapsto (a_1 + b_1 - u, v, a_3) \\
\beta_3^+ &: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3 \,, \quad (u, v) \mapsto (u, v, b_3) \,.
\end{aligned}$$

In questo caso, si può visualizzare il bordo orientato

$$\partial I = (\alpha_1^-, \beta_1^+, \alpha_2^+, \beta_2^-, \alpha_3^-, \beta_3^+)$$

come incollamento delle sei facce del parallelepipedo I, tutte orientate in modo tale che il vettore normale sia sempre rivolto verso l'esterno.



8 La formula di Gauss

In questa sezione, I sarà un rettangolo di $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$ (quindi, rispetto alla sezione precedente, considereremo il caso $N = M+1$). Nel teorema che segue, si ottiene l'elegante **formula di Gauss**.

Teorema. *Se ω è una $(N-1)$-forma differenziale di classe C^1 definita su un aperto contenente un rettangolo I di $\mathbb{R}^N$, si ha:*

$$\int_I d\omega = \int_{\partial I} \omega \,.$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere ω nella forma

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} F_j(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_N \,.$$

Allora

$$\begin{aligned} d\omega(\boldsymbol{x}) &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial F_j}{\partial x_m}(\boldsymbol{x})\, dx_m \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_N \\ &= \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N \,. \end{aligned}$$

Essendo le derivate parziali delle F_j continue, esse sono integrabili sull'intervallo I, e possiamo usare la formula di riduzione di Fubini:

$$\begin{aligned}\int_I d\omega &= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \int_I \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\, dx_1 \dots dx_N \\ &= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \int_{I_j} \left(\int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_N)\, dx_j \right) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_N \\ &= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \int_{I_j} [F_j(x_1, \dots, x_{j-1}, b_j, x_{j+1}, \dots, x_N) - \\ &\qquad - F_j(x_1, \dots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \dots, x_N)]\, dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_N\,,\end{aligned}$$

per il teorema fondamentale. D'altra parte,

$$\int_{\partial I} \omega = \sum_{k=1}^N (-1)^k \int_{\alpha_k^+} \omega + \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \int_{\beta_k^+} \omega\,.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_k^+} \omega &= \sum_{j=1}^N \int_{\alpha_k^+} F_j\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_N \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{I_k} (F_j \circ \alpha_k^+) \det(\alpha_k^+)'_{(1,\dots,\hat{j},\dots,N)}\, dx_1 \dots \widehat{dx_k} \dots dx_N \\ &= \int_{I_k} F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_N)\, dx_1 \dots \widehat{dx_k} \dots dx_N\,,\end{aligned}$$

essendo

$$\det(\alpha_k^+)'_{(1,\dots,\hat{j},\dots,N)} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k\,, \\ 1 & \text{se } j = k\,. \end{cases}$$

Procedendo similmente per β_k^+, alla fine si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_{\partial I} \omega = \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \int_{I_k} &[F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \dots, x_N) - \\ &- F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_N)]\, dx_1 \dots \widehat{dx_k} \dots dx_N\,,\end{aligned}$$

e la dimostrazione è completa. ∎

9 Bordo orientato di una M-superficie

In questa sezione, I sarà un rettangolo di $\mathbb{R}^{M+1}$ e $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ una $(M+1)$-superficie.

Definizione. *Se $1 \leq M \leq N-1$, chiameremo* **bordo orientato** *di σ la funzione $\partial\sigma = \sigma \circ \partial I$, che risulta essere un incollamento delle seguenti M-superfici:*

(a) $\sigma \circ \alpha_k^-$ e $\sigma \circ \beta_k^+$ se k è dispari;

(b) $\sigma \circ \alpha_k^+$ e $\sigma \circ \beta_k^-$ se k è pari,

con $k = 1, \ldots, M+1$.

Data una M-forma differenziale ω il cui dominio contiene il supporto di $\partial\sigma$, avremo quindi

$$\begin{aligned}\int_{\partial\sigma} \omega &= \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^k \int_{\sigma\circ\alpha_k^+} \omega + \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \int_{\sigma\circ\beta_k^+} \omega \\ &= \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \left(\int_{\sigma\circ\beta_k^+} \omega - \int_{\sigma\circ\alpha_k^+} \omega \right) .\end{aligned}$$

Nota. È utile estendere la scrittura $\int_{\partial\sigma} \omega$ nel caso in cui $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ sia una curva, con $N \geq 1$, e $\omega = f : U \to \mathbb{R}$ una 0-forma differenziale; in questo caso, si pone:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) .$$

Esempi. Come illustrazione, consideriamo come al solito il caso $N = 3$. Cominciamo con tre esempi di bordo orientato di superfici.

1. Sia $\sigma : [r,R] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, con $0 \leq r < R$, data da

$$\sigma(u,v) = (u\cos v, u \sin v, 0) .$$

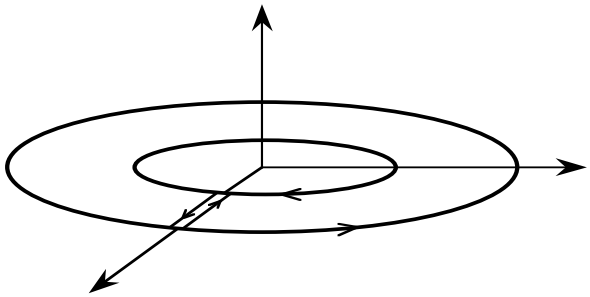
Il suo supporto è un cerchio se $r = 0$, una corona circolare se $r > 0$. Il bordo orientato

$$\partial\sigma = (\sigma \circ \alpha_1^-, \sigma \circ \beta_1^+, \sigma \circ \alpha_2^+, \sigma \circ \beta_2^-)$$

è dato dall'incollamento delle seguenti quattro curve:

$$\begin{aligned}\sigma \circ \alpha_1^-(v) &= (r\cos v, -r \sin v, 0) , \\ \sigma \circ \beta_1^+(v) &= (R\cos v, R \sin v, 0) , \\ \sigma \circ \alpha_2^+(u) &= (u, 0, 0) , \\ \sigma \circ \beta_2^-(u) &= (r + R - u, 0, 0) .\end{aligned}$$

La prima curva ha come supporto una circonferenza di raggio r, che degenera nell'origine nel caso in cui $r = 0$. La seconda ha come supporto una circonferenza di raggio R. Si noti però che il verso di percorrenza di queste due circonferenze è opposto. Le ultime due curve sono equivalenti con orientazioni opposte.



Sia ora dato, per esempio, il campo di vettori $F(x,y,z)=(-y,x,xye^z)$. Si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\sigma} F\cdot d\ell &= \int_{\sigma\circ\alpha_1^-} F\cdot d\ell + \int_{\sigma\circ\beta_1^+} F\cdot d\ell\\ &= \int_0^{2\pi}[-r^2\sin^2 v - r^2\cos^2 v]\,dv + \int_0^{2\pi}[R^2\sin^2 v + R^2\cos^2 v]\,dv\\ &= 2\pi(R^2-r^2)\,.\end{aligned}$$

2. Consideriamo la superficie $\sigma:[r,R]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$, con $0<r<R$, definita da

$$\begin{aligned}\sigma(u,v) = \Bigg(&\left(\frac{r+R}{2}+\left(u-\frac{r+R}{2}\right)\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\cos v,\\ &\left(\frac{r+R}{2}+\left(u-\frac{r+R}{2}\right)\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\sin v,\\ &\left(u-\frac{r+R}{2}\right)\sin\left(\frac{v}{2}\right)\Bigg)\,,\end{aligned}$$

il cui supporto è un nastro di Möbius. In questo caso, il bordo orientato è dato dall'incollamento di:

$$\begin{aligned}\sigma\circ\alpha_1^-(v) = \Bigg(&\left(\frac{r+R}{2}+\frac{R-r}{2}\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\cos v,\\ &-\left(\frac{r+R}{2}+\frac{R-r}{2}\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\sin v,\\ &-\frac{R-r}{2}\sin\left(\frac{v}{2}\right)\Bigg)\,,\\ \sigma\circ\beta_1^+(v) = \Bigg(&\left(\frac{r+R}{2}+\frac{R-r}{2}\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\cos v,\\ &\left(\frac{r+R}{2}+\frac{R-r}{2}\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\sin v,\\ &\frac{R-r}{2}\sin\left(\frac{v}{2}\right)\Bigg)\,,\\ \sigma\circ\alpha_2^+(u) &= (u,0,0)\,,\\ \sigma\circ\beta_2^-(u) &= (u,0,0)\,.\end{aligned}$$

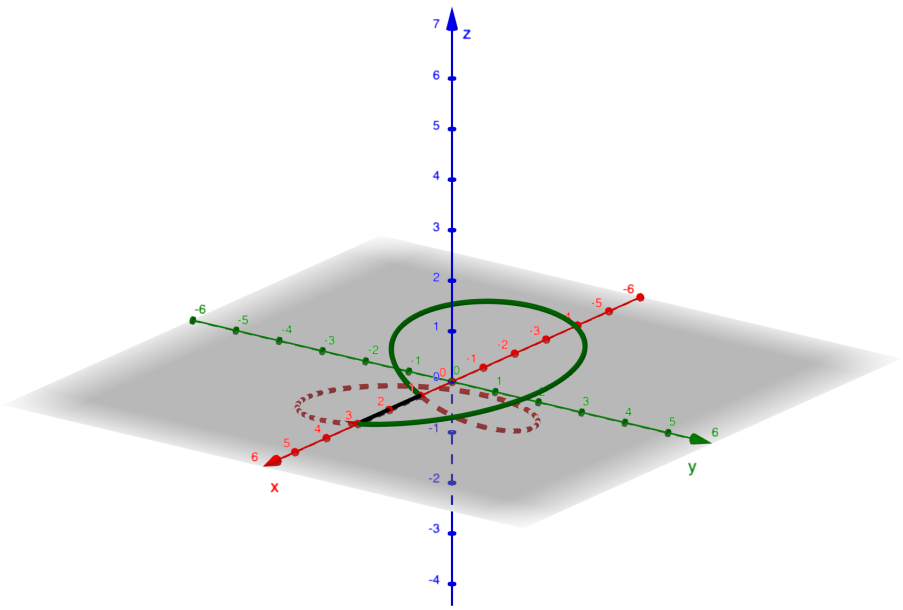


Figura 1: *Il supporto di* $\sigma \circ \alpha_1^-$ *(linea rossa),* $\sigma \circ \beta_1^+$ *(linea verde),* $\sigma \circ \alpha_2^+$ *e* $\sigma \circ \beta_2^-$ *(linea nera)*

Si noti che in questo caso le ultime due curve sono identiche.

3. Consideriamo la superficie $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\phi, \theta) = (R \sin\phi \cos\theta, R \sin\phi \sin\theta, R \cos\phi)\,,$$

il cui supporto è la sfera di raggio $R > 0$ centrata nell'origine. In questo caso, il bordo orientato è dato dall'incollamento di:

$$\begin{aligned}
\sigma \circ \alpha_1^-(\theta) &= (0, 0, R)\,,\\
\sigma \circ \beta_1^+(\theta) &= (0, 0, -R)\,,\\
\sigma \circ \alpha_2^+(\phi) &= (R \sin\phi, 0, R \cos\phi)\,,\\
\sigma \circ \beta_2^-(\phi) &= (R \sin\phi, 0, -R \cos\phi)\,.
\end{aligned}$$

Si noti che le prime due curve sono degenerate in un punto, mentre le ultime due sono equivalenti con orientazioni opposte. Quindi, qualsiasi sia il campo di vettori F, si avrà $\int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell = 0$.

Vediamo ora un esempio di bordo orientato di un volume in $\mathbb{R}^3$. Sia $\sigma : [0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ il volume definito da

$$\sigma(\rho,\phi,\theta) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,,$$

il cui supporto è la palla, centrata nell'origine, di raggio $R>0$. Il bordo orientato

$$\partial\sigma = (\sigma\circ\alpha_1^-, \sigma\circ\beta_1^+, \sigma\circ\alpha_2^+, \sigma\circ\beta_2^-, \sigma\circ\alpha_3^-, \sigma\circ\beta_3^+)$$

è dato dall'incollamento delle seguenti sei superfici:

$$\begin{aligned}
&\sigma\circ\alpha_1^-(\phi,\theta) = (0,0,0)\,,\\
&\sigma\circ\beta_1^+(\phi,\theta) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)\,,\\
&\sigma\circ\alpha_2^+(\rho,\theta) = (0,0,\rho)\,,\\
&\sigma\circ\beta_2^-(\rho,\theta) = (0,0,-\rho)\,,\\
&\sigma\circ\alpha_3^-(\rho,\phi) = ((R-\rho)\sin\phi, 0, (R-\rho)\cos\phi)\,,\\
&\sigma\circ\beta_3^+(\rho,\phi) = (\rho\sin\phi, 0, \rho\cos\phi)\,.
\end{aligned}$$

Si noti che la prima superficie è degenerata in un punto (l'origine), la seconda ha come supporto la sfera intera, la terza e la quarta sono degenerate in due curve mentre le rimanenti due sono equivalenti con orientazioni opposte. In questo esempio, quindi, dato un campo di vettori F, si avrà sempre

$$\int_{\partial\sigma} F\cdot dS = \int_{\sigma\circ\beta_1^+} F\cdot dS\,.$$

10 La formula di Stokes–Cartan

Enunciamo la seguente generalizzazione del teorema di Gauss, in cui si ottiene l'importante **formula di Stokes–Cartan**.

Teorema. *Sia $0\le M\le N-1$. Se ω è una M-forma differenziale di classe C^1 su un aperto U di $\mathbb{R}^N$ e $\sigma : I\to\mathbb{R}^N$ una $(M+1)$-superficie il cui supporto è contenuto in U, si ha:*

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma}\omega\,.$$

Si noti che il caso $M=0$, $N=1$ e $\sigma(u)=u$ è una versione del teorema fondamentale, anche se qui si richiede che la derivata di ω sia continua.

Consideriamo alcuni corollari.

Il caso $M=0$. Consideriamo una 0-forma differenziale $f : U\to\mathbb{R}$ e otteniamo il seguente

Teorema. *Sia $\omega = f : U \to \mathbb{R}$ una funzione scalare di classe C^1 e $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ una curva con supporto contenuto in U. Allora:*

$$\int_\sigma \nabla f \cdot d\ell = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $G(t) = f(\sigma(t))$. Essa è di classe C^1, e per il teorema fondamentale si ha

$$\int_a^b G'(t)\,dt = G(b) - G(a)\,.$$

Siccome $G'(t) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$, ne segue la formula cercata. ∎

Nota. L'integrale di linea del gradiente di una funzione f non dipende dalla curva scelta, ma soltanto dal valore della funzione nei due estremi $\sigma(b)$ e $\sigma(a)$.

Esempio. Siano dati il campo di vettori in $\mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z) = -\left(\frac{x}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}},\ \frac{y}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}},\ \frac{z}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right)$$

e la curva $\sigma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Vogliamo calcolare l'integrale di linea $\int_\sigma F \cdot d\ell$. Osserviamo che $F = \nabla f$, con

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,$$

e quindi:

$$\int_\sigma F \cdot d\ell = f(\sigma(4\pi)) - f(\sigma(0)) = \frac{1}{\sqrt{1+16\pi^2}} - 1\,.$$

Il caso $M = 1$, $N = 3$. Consideriamo una 1-forma differenziale

$$\omega(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x})\,dx_1 + F_2(\boldsymbol{x})\,dx_2 + F_3(\boldsymbol{x})\,dx_3$$

e otteniamo la **formula di Kelvin–Stokes**.

Teorema. *Sia $F : U \to \mathbb{R}^3$ un campo di vettori di classe C^1 e $\sigma : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^3$ una superficie con supporto contenuto in U. Si ha:*

$$\int_\sigma \nabla \times F \cdot dS = \int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell\,.$$

A parole. *Il flusso del rotore del campo F attraverso la superficie σ coincide con l'integrale di linea di F lungo il bordo di σ.*

Dimostrazione. Supporremo per semplicità che σ sia di classe C^2. Posto $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, definiamo la seguente 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2$:

$$\tilde{\omega}(u,v) = F(\sigma(u,v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v)\, du + F(\sigma(u,v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)\, dv\,.$$

Iniziamo a valutare il suo integrale su α_1^- :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_1^-} \tilde{\omega} &= \int_{a_2}^{b_2} F(\sigma(a_1, a_2 + b_2 - v)) \cdot \Big(- \frac{\partial \sigma}{\partial v}(a_1, a_2 + b_2 - v)\Big) dv \\ &= \int_{\sigma \circ \alpha_1^-} F \cdot d\ell\,.\end{aligned}$$

Si verificano poi le analoghe uguaglianze per l'integrale su β_1^+, α_2^+ e β_2^-, per cui si ha che

$$\int_{\partial I} \tilde{\omega} = \int_{\partial \sigma} F \cdot d\ell\,.$$

Con un po' di conti, si trova:

$$\begin{aligned}&d\tilde{\omega}(u,v) = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(F(\sigma(u,v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(F(\sigma(u,v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v)\right)\right] du \wedge dv \\ &= \nabla \times F(\sigma(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)\right) du \wedge dv\,,\end{aligned}$$

per cui

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_\sigma \nabla \times F \cdot dS\,.$$

La formula di Gauss applicata a $\tilde{\omega}$ permette quindi di concludere. ∎

Esempio. Sia $F(x,y,z) = (-y, x, 0)$ e $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$; vogliamo calcolare l'integrale di linea $\int_\gamma F \cdot d\ell$. Abbiamo già visto come calcolare questo integrale facendo uso diretto della definizione. Procediamo ora in un altro modo: definiamo la superficie $\sigma : [0, R] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ data da $\sigma(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0)$. Osserviamo che $\gamma = \sigma \circ \beta_1^+$, per cui si ha:

$$\int_\gamma F \cdot d\ell = \int_{\sigma \circ \beta_1^+} F \cdot d\ell = \int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell = \int_\sigma \nabla \times F \cdot dS\,.$$

Osserviamo che $\nabla \times F(x,y,z) = (0,0,2)$ e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \rho}(\rho,\theta) \times \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\rho,\theta) = (0,0,\rho)\,.$$

Ne segue che

$$\int_\gamma F \cdot d\ell = \int_0^R \int_0^{2\pi} (0,0,2) \cdot (0,0,\rho)\, d\theta\, d\rho = 2\pi R^2\,.$$

Il caso $M = 2$, $N = 3$. Consideriamo una 2-forma differenziale

$$\omega(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + F_2(\boldsymbol{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + F_3(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_2$$

e otteniamo la **formula di Gauss–Ostrogradski**.

Teorema. *Sia $F : U \to \mathbb{R}^3$ un campo di vettori di classe C^1 e supponiamo che $\sigma : I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}^3$ sia una 3-superficie (ossia un volume) con supporto contenuto in U. Si ha:*

$$\int_\sigma \nabla \cdot F\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\partial\sigma} F \cdot dS\,.$$

Se inoltre σ è regolare e iniettiva su $\mathring{I}$, con $\det J\sigma(\boldsymbol{u}) > 0$ per ogni $\boldsymbol{u} \in \mathring{I}$, allora

$$\int_{\sigma(I)} \nabla \cdot F = \int_{\partial\sigma} F \cdot dS\,.$$

In termini intuitivi. *L'integrale della divergenza del campo F sull'insieme $V = \sigma(I)$ coincide con il flusso di F uscente da V.*

Dimostrazione. Supporremo per semplicità che σ sia di classe C^2. Consideriamo la seguente 2-forma differenziale $\tilde\omega$ definita su I:

$$\begin{aligned}\tilde\omega(\boldsymbol{u}) = {} & F(\sigma(\boldsymbol{u})) \cdot \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}) \times \frac{\partial\sigma}{\partial u_3}(\boldsymbol{u})\right) du_2 \wedge du_3 + \\ & + F(\sigma(\boldsymbol{u})) \cdot \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u_3}(\boldsymbol{u}) \times \frac{\partial\sigma}{\partial u_1}(\boldsymbol{u})\right) du_3 \wedge du_1 + \\ & + F(\sigma(\boldsymbol{u})) \cdot \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) \times \frac{\partial\sigma}{\partial u_2}(\boldsymbol{u})\right) du_1 \wedge du_2\end{aligned}$$

Considerata la superficie β_1^+, si ha:

$$\begin{aligned}&\int_{\beta_1^+} \tilde\omega = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} F(b_1, u_2, u_3) \cdot \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u_2}(b_1, u_2, u_3) \times \frac{\partial\sigma}{\partial u_3}(b_1, u_2, u_3)\right) du_2\, du_3 \\ &= \int_{\beta_1^+} F \cdot dS\,.\end{aligned}$$

Calcolando analogamente gli integrali sulle altre cinque superfici che compongono ∂I, si conclude che

$$\int_{\partial I} \tilde\omega = \int_{\partial\sigma} F \cdot dS\,.$$

Facendo i conti, con un po' di pazienza si ha:

$$\begin{aligned}d\tilde\omega(\boldsymbol{u}) = {} & \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(F(\sigma(\boldsymbol{u})) \cdot \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}) \times \frac{\partial\sigma}{\partial u_3}(\boldsymbol{u})\right)\right) + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(F(\sigma(\boldsymbol{u})) \cdot \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u_3}(\boldsymbol{u}) \times \frac{\partial\sigma}{\partial u_1}(\boldsymbol{u})\right)\right) + \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(F(\sigma(\boldsymbol{u})) \cdot \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) \times \frac{\partial\sigma}{\partial u_2}(\boldsymbol{u})\right)\right)\right] du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 \\ = {} & \nabla \cdot F(\sigma(\boldsymbol{u}))\, \det \sigma'(\boldsymbol{u})\, du_1 \wedge du_2 \wedge du_3\,.\end{aligned}$$

Quindi, si ha:

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_I \nabla \cdot F(\sigma(\boldsymbol{u})) \det \sigma'(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u}\,.$$

D'altra parte, siccome σ induce un diffeomorfismo tra $\mathring{I}$ e $\sigma(\mathring{I})$ con $\det \sigma' > 0$, per il teorema di cambiamento di variabili

$$\int_I \nabla \cdot F(\sigma(\boldsymbol{u})) \det \sigma'(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u} = \int_{\sigma(I)} \nabla \cdot F(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

La formula di Gauss applicata a $\tilde{\omega}$ permette quindi di concludere. ∎

Esempio. Si voglia calcolare il flusso del campo di vettori

$$F(x,y,z) = ([x^2+y^2+z^2]x, [x^2+y^2+z^2]y, [x^2+y^2+z^2]z)$$

attraverso una superficie sferica parametrizzata da $\eta : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$:

$$\eta(\phi,\theta) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)\,.$$

Ci ricordiamo che $\eta = \sigma \circ \beta_1^+$, dove $\sigma : I = [0,R] \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ è il volume dato da

$$\sigma(\rho,\phi,\theta) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,.$$

Abbiamo quindi:

$$\int_\eta F \cdot dS = \int_{\partial\sigma} F \cdot dS = \int_{\sigma(I)} \nabla \cdot F\,.$$

Essendo $\nabla \cdot F(x,y,z) = 5(x^2+y^2+z^2)$, passando a coordinate sferiche si ha:

$$\int_{\sigma(I)} \nabla \cdot F = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} (5\rho^2)(\rho^2\sin\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 4\pi R^5\,.$$

11 Interpretazione fisica del rotore e della divergenza

Il rotore. La formula di Kelvin–Stokes ci permette di dare un'interpretazione del rotore di un campo di vettori F in $\mathbb{R}^3$. Supponiamo dapprima che $\nabla \times F$ sia costante. Se ne conosciamo la direzione, possiamo prendere un piano ad esso ortogonale, e su questo piano un cerchio di raggio $r > 0$ (e quindi di area πr^2), che possiamo facilmente parametrizzare, in coordinate polari, con una superficie $\sigma_r : I \to \mathbb{R}^3$. Allora

$$\int_{\sigma_r} \nabla \times F \cdot dS = \pm\pi r^2 \left\|\nabla \times F\right\|.$$

Scegliamo ora l'orientazione per la parametrizzazione σ_r in modo che il versore normale ν_{σ_r} abbia la stessa direzione di $\nabla \times F$. Dalla formula di Kelvin-Stokes troviamo quindi la lunghezza del rotore:

$$\|\nabla \times F\| = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial\sigma_r} F \cdot d\ell \,.$$

Nel caso in cui $\nabla \times F$ dovesse non essere costante, fissiamo un punto $\boldsymbol{x}$ del dominio e procediamo come sopra, prendendo il cerchio parametrizzato da σ_r centrato in $\boldsymbol{x}$ di raggio r. Per continuità, se $r > 0$ è molto piccolo, possiamo supporre che $\nabla \times F$ sia "quasi constante" su questo cerchio. Più precisamente, avremo che

$$\|\nabla \times F(\boldsymbol{x})\| = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial\sigma_r} F \cdot d\ell \,.$$

Si vede da questa espressione che il rotore misura il contributo rotativo del campo F lungo la circonferenza $\partial\sigma_r$. Da qui il nome "rotore".

Se non dovessimo conoscere a priori la direzione di $\nabla \times F(\boldsymbol{x})$, la si può determinare nel modo seguente: per ogni piano passante per $\boldsymbol{x}$ si procede come sopra e si calcola il $\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial\sigma_r} F \cdot d\ell$. Tra tutte queste quantità, ottenute scegliendo i piani in tutti i modi possibili, si determina quella più grande. Il piano che realizza questa quantità massima sarà quello ortogonale a $\nabla \times F(\boldsymbol{x})$, e il versore normale individuato da σ_r avrà la stessa direzione di $\nabla \times F(\boldsymbol{x})$.

La divergenza. La formula di Gauss–Ostrogradski ci può dare un'interpretazione della divergenza di un campo di vettori F in $\mathbb{R}^3$. Supponiamo dapprima che $\nabla \cdot F$ sia costante. Consideriamo una palla chiusa $\overline{B}_r$, di raggio $r > 0$ (e quindi di volume $\frac{4}{3}\pi r^3$), che possiamo facilmente parametrizzare, in coordinate sferiche, con una 3-superficie $\sigma_r : I \to \mathbb{R}^3$, avente $\det J\sigma_r(\boldsymbol{u}) > 0$ per ogni $\boldsymbol{u} \in \mathring{I}$. Allora

$$\int_{\overline{B}_r} \nabla \cdot F = \frac{4}{3}\pi r^3 \, \nabla \cdot F \,.$$

Dalla formula di Gauss-Ostrogradski troviamo quindi che

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_{\partial\sigma_r} F \cdot dS \,.$$

Nel caso in cui $\nabla \cdot F$ dovesse non essere costante, fissiamo un punto $\boldsymbol{x}$ del dominio e procediamo come sopra, prendendo la palla $\overline{B}_r = \overline{B}(\boldsymbol{x}, r)$, centrata in $\boldsymbol{x}$ di raggio r, parametrizzata da σ_r. Per continuità, se $r > 0$ è molto piccolo, possiamo supporre che $\nabla \cdot F$ sia "quasi constante" su questa palla. Più precisamente, avremo che

$$\nabla \cdot F(\boldsymbol{x}) = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_{\partial\sigma_r} F \cdot d\ell \,.$$

Da questa formula si vede che la divergenza ci fornisce una misura del flusso per unità di volume del campo F attraverso la superficie sferica $\partial\sigma_r$. Questo sarà positivo se il campo fluisce verso l'esterno, negativo se verso l'interno. Da qui il nome "divergenza".

12 Risultati analoghi in $\mathbb{R}^2$

Supponiamo che U sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Come corollario del teorema di Stokes-Cartan, prendendo $M = 1$, $N = 2$, otteniamo la **formula di Gauss–Green**.

Teorema. *Sia $F = (F_1, F_2) : U \to \mathbb{R}^2$ un campo di vettori di classe C^1 e supponiamo che $\sigma : I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ sia una superficie con supporto contenuto in U. Si ha:*

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 = \int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell \,.$$

Se inoltre σ è regolare e iniettiva su $\mathring{I}$, con $\det J\sigma(\boldsymbol{u}) > 0$ per ogni $\boldsymbol{u} \in \mathring{I}$, allora

$$\int_{\sigma(I)} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = \int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell \,.$$

Dimostrazione. Supporremo per semplicità che σ sia di classe C^2. Similmente a quanto fatto nella dimostrazione del teorema di Kelvin–Stokes, consideriamo la forma differenziale ausiliaria $\tilde{\omega}$ definita su I da

$$\tilde{\omega}(u, v) = F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)\, du + F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)\, dv$$

e verifichiamo che

$$\int_{\partial I} \tilde{\omega} = \int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell \,.$$

Se σ è di classe C^2, allora $\tilde{\omega}$ è di classe C^1 e, facendo i conti, si trova

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}(u, v) = &\left[\frac{\partial}{\partial u} \left(F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right) - \right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial v} \left(F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \right) \right] du \wedge dv \\ = &\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\sigma(u, v)) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\sigma(u, v)) \right) \det \sigma'(u, v)\, du \wedge dv \,. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_I \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\sigma(u, v)) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\sigma(u, v)) \right) \det \sigma'(u, v)\, du\, dv \,,$$

e siccome σ induce un diffeomorfismo tra $\mathring{I}$ e $\sigma(\mathring{I})$ con $\det \sigma' > 0$, per il teorema di cambiamento di variabili

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_{\sigma(I)} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) .$$

La formula di Gauss applicata a $\tilde{\omega}$ permette quindi di concludere. ∎

Esempio. Consideriamo la superficie $\sigma : I = [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\sigma(\rho,\theta) = (A\rho\cos\theta, B\rho\sin\theta)$, il cui supporto è una superficie ellittica avente semiassi di lunghezza $A > 0$ e $B > 0$. Si prenda il campo di vettori $F(x,y) = (-y,x)$. Essendo

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2$$

e (come nel caso del cerchio)

$$\int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell = \int_{\sigma\circ\beta_1^+} F \cdot d\ell\,,$$

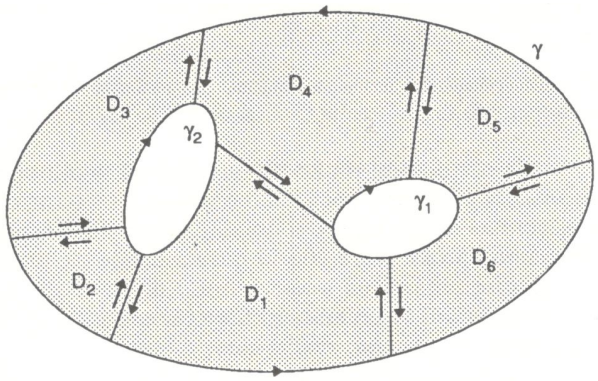
la formula di Gauss-Green ci da:

$$\int_{\sigma(I)} 2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} (-B\sin\theta, A\cos\theta)\cdot(-A\sin\theta, B\cos\theta)\,d\theta = 2\pi AB.$$

Se ne ricava l'area della superficie ellittica: $\mu(\sigma(I)) = \pi AB$.

13 Possibili estensioni della teoria

Quanto visto finora può essere esteso alla trattazione di insiemi che non siano direttamente parametrizzabili. Ad esempio, un insieme come in figura può essere trattato suddividendolo in parti più piccole che siano separatamente parametrizzabili, e considerando l'incollamento di tali parametrizzazioni.



Bisogna però fare attenzione che le orientazioni scelte permettano di annullare le parti parassiti interne che si vengono così a creare. La suddivisione della figura, ad esempio, mostra che i segmenti interni sono stati parametrizzati in modo tale che il loro incollamento non darà un contributo effettivo all'integrale, in quanto le parametrizzazioni sono a due a due equivalenti con orientazione opposta. Una trattazione generale diventa però piuttosto delicata e non verrà affrontata qui.

Un altro modo di affrontare il problema generale potrebbe essere quello di considerare delle "parametrizzazioni locali" di un insieme. Si è così portati a

studiare le cosiddette "varietà differenziabili" e bisogna definire cosa si intende per integrale di una forma differenziale su una varietà di questo tipo. Anche qui ci si trova a dover considerare il problema dell'orientazione, sia della varietà differenziabile che del suo bordo. La questione è piuttosto complicata e preferisco non approfondirla in questo corso.

Per ognuna delle sopra citate estensioni della teoria c'è il relativo Teorema di Stokes-Cartan, con le sue conseguenze in dimensione 2 e 3, del tutto analoghe a quelle che abbiamo già visto.