

12 dicembre

$L[y]$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$(r-1)^2 = r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$r=1 \quad e' \text{ l'unico}$$

soluzione $\Rightarrow e^x$ è una soluzione ma ciò non fornisce tutte le soluzioni

$$y = u e^x \quad \text{con } u = u(x) \text{ non una funzione costante}$$

$$L[ue^x] = (ue^x)'' - 2(ue^x)' + ue^x =$$

$$(ue^x)' = u'e^x + u(e^x)'$$

$$(ue^x)'' = u''e^x + 2u'(e^x)' + u(e^x)''$$

$$= u''e^x + 2u'(e^x)' - 2u'e^x + u \underbrace{[(e^x)'' - 2(e^x)' + e^x]}_{L[e^x]}$$

$$= u''e^x + u' \underbrace{(2(e^x)' - 2e^x)}_0 + u \underbrace{L[e^x]}_0$$

$$= u''e^x = 0 \iff u'' = 0 \quad u = x$$

Concludo che e^x e $x e^x$ sono soluzioni

si $L[e^x] = 0$, e^x e $x e^x$ non sono funzioni linearmente dipendenti.

$$W = \det \begin{pmatrix} e^x & x e^x \\ (e^x)' & (x e^x)' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x & x e^x + 0 \\ e^x & x e^x + e^x \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\det \begin{pmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & x e^x \end{pmatrix}}_0 + \det \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x \end{pmatrix} = e^{2x}$$

$$W' - 2W = 0$$

$$(e^{2x})' - 2e^{2x} = 0$$

$$P(r) = (r-1)^2$$

$$P'(r) = 2(r-1)$$

$$P'(1) = 0$$

$$L[y] = y'' + by' + cy$$

$$p(r) = r^2 + br + c$$

$$p'(r) = 2r + b$$

$$L[ue^{rx}] =$$

$$p''(r) = 2$$

$$= (ue^{rx})'' + b(ue^{rx})' + c ue^{rx}$$

$$(ue^{rx})' = u' e^{rx} + u(e^{rx})'$$

$$(ue^{rx})'' = u'' e^{rx} + 2u'(e^{rx})' + u(e^{rx})''$$

$$= [u'' e^{rx} + 2u' r e^{rx} + u(e^{rx})'']$$

$$+ b [u' e^{rx} + u(e^{rx})'] + c ue^{rx}$$

$$= u'' e^{rx} + u'(2r+b) e^{rx} +$$

$$+ u \left((e^{rx})'' + b(e^{rx})' + c e^{rx} \right)$$

$$L[e^{rx}] = p(r) e^{rx}$$

$$= u'' e^{rx} + \underbrace{u'(2r+b)}_{p'(r)} e^{rx} + u p(r) e^{rx}$$

$$\boxed{L[ue^{rx}] = (u'' + p'(r)u' + u p(r)) e^{rx}}$$

questo vale per ogni $r \in \mathbb{C}$ e per ogni funzione $u(x)$

che ammetta derivate fino all'ordine 2.

Teorema

Sia $L[y] = y'' + by' + cy$ dato con $b, c \in \mathbb{R}$.

e sia $p(r) = r^2 + br + c$ e consideriamo $L[y] = 0$

1) Se $p(r)$ ha due radici reali e distinte $r_{\pm}$

$$y_h = C_1 e^{r_+ x} + C_2 e^{r_- x}$$

2) Se $p(r)$ ha due radici complesse coniugate

$$r_{\pm} = \alpha \pm i\beta \quad \text{allora}$$

$\forall C_1, C_2$

$$y_h = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$= A e^{\alpha x} \sin(\beta x + \theta) \quad \forall A, \theta$$

$$= \frac{A}{\cos(\theta)} e^{\alpha x} \cos(\beta x + \theta)$$

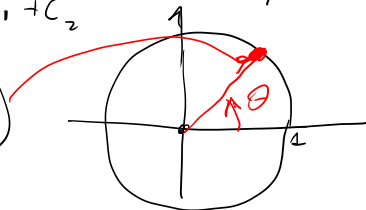
3) Se $p(r)$ ha una unica radice $r_+ = r_-$

$$y_h = C_1 e^{r_+ x} + C_2 x e^{r_+ x} = (C_1 + C_2 x) e^{r_+ x}$$

$$C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) = \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{\alpha x} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos(\beta x) + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin(\beta x) \right) =$$

$$\text{Il punto } \left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right)$$



è un punto della circonferenza. Esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos \theta \quad \text{e}$$

$$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \sin \theta$$
$$= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{\alpha x} (\sin \theta \cos(\beta x) + \cos(\theta) \sin(\beta x))$$

$$= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{\alpha x} \sin(\beta x + \theta)$$

Piu' in generale se

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

per costanti reali $a_0, \dots, a_{n-1}$

il polinomio caratteristico e'

$$p(r) = r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

$p(r) = 0$ le soluzioni sono le radici del polinomio $r = r_1$ di molteplicita' m_1
 r_2 m_2

r_k m_k

con $m_1 + \dots + m_k = n$

$$L[e^{rx}] = p(r) e^{rx}$$

ed una base di soluzioni dell'equazione omogenea e' dato da

$$\begin{matrix} e^{r_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{r_1 x} \\ \vdots \\ e^{r_k x}, \dots, x^{m_k-1} e^{r_k x} \end{matrix} = y_1, \dots, y_n$$

Il Wronskiano di n funzioni $y_1, \dots, y_n$

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Se $y_1, \dots, y_n$ sono soluzioni di

$$y^{(n)} + a_{n-1}^{(x)} y^{(n-1)} + \dots + a_1^{(x)} y' + a_0 y = 0$$

allora W soddisfa

$$W' + a_{n-1}^{(x)} W = 0$$

$$\Rightarrow W = C e^{-\int a_{n-1}^{(x)} dx} = C e^{-x a_{n-1}}$$

se $a_{n-1}^{(x)} \equiv a_{n-1}$ costante

$$L[y] = y'' + by' + cy = f(x)$$

$$L[y] = y'' + by' + cy = 0$$

$$y_g = y_h + y_p$$

y_g sol. generale non omogenea
 y_h soluzione generale omogenea
 y_p soluzione particolare non omogenea

Thm: per y_p col metodo della conigliatura.

Il metodo della conigliatura vale solo se $f(x)$ è di una forma speciale.

$$\underbrace{y'' - 5y' + 6y}_{L[y]} = e^x \quad |$$

$$p(x) = x^2 - 5x + 6$$

si cerca una soluzione $y = C e^x$ con $C \in \mathbb{C}$.

$$L[Ce^x] = e^x$$

$$= C L[e^x] = C p(1) e^x = e^x$$

$$p(1) = 1 - 5 + 6 = 2 \neq 0$$

$$C p(1) = 1 \quad C = \frac{1}{p(1)} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y'' - 5y' + 6y = e^x} \quad \text{allora si cerca}$$

$$y_p = C e^{\alpha x}$$

$$L[Ce^{\alpha x}] = C L[e^{\alpha x}] = C p(\alpha) e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$$

Se $\alpha \neq 2, 3 \Leftrightarrow p(\alpha) \neq 0$ allora

$$\text{si riduce } C p(\alpha) = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{p(\alpha)}$$

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x} \quad p(2) = 0$$

non esiste alcuna y_p della forma $y_p = C e^{2x}$

$$y_p = C x e^{2x}$$

$$L[C x e^{2x}] = C L[x e^{2x}] =$$

$$= C [(x)'' + p'(2)(x)' + p(2)x] e^{2x}$$

$$= C [0 + \underbrace{p'(2)}_{-1} + 0] e^{2x} = e^{2x}$$

$$p(x) = x^2 - 5x + 6 \quad p'(x) = 2x - 5$$

$$p'(2) = 4 - 5 = -1$$

$$= -C e^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow -C = 1$$

$$\Downarrow C = -1$$

$$y = -x e^{2x}$$

$$y'' - 2y' + y = 3 e^x \quad p(1) = p'(1) = 0$$

$$p(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$p'(x) = 2(x-1)$$

$L[y] = 0$ ha come soluzioni $y = e^x, x e^x$

$$y_p = u e^x$$

$$L[y_p] = 3 e^x$$

$$L[ue^x] = [u'' + \underbrace{p'(1)}_0 u' + \underbrace{p(1)}_0 u] e^x = 3 e^x$$

$$u'' e^x = 3 e^x$$

$$u = C x^2$$

$$u'' = 2C$$

$$2C x^2 = 3 e^x$$

$$2C = 3$$

$$C = \frac{3}{2}$$

$$y_p = \frac{3}{2} x^2 e^x$$

Teorema Dato

$$L[y] = y'' + by' + cy = p(x) e^{ax} = f(x)$$

Con a una costante assegnata e $p(x)$ polinomio
assegnato deg $p(x) = n$ allora $\exists$
una soluzione particolare

$$y_p = Q(x) e^{ax} \quad \text{con } Q(x) \text{ un opportuno}$$

$$1) \text{ se } p(a) \neq 0 \quad \text{polinomio dove} \quad \deg Q \leq n$$

$$2) \text{ se } p(a) = 0 \text{ ma } p'(a) \neq 0 \quad \text{allora } Q(x) = x \tilde{Q}(x) \text{ dove } \deg \tilde{Q} \leq n$$

$$3) \text{ se } p(a) = p'(a) = 0 \quad \text{allora} \quad Q(x) = x^2 \tilde{Q}(x) \text{ dove } \deg \tilde{Q} \leq n$$

Esempio

$$y'' - 2y' + y = x^3 e^x \quad p(a) = p'(1) = 0$$

$$y_p = x^2 (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) e^x \\ = \underbrace{(a_3 x^5 + a_2 x^4 + a_1 x^3 + a_0 x^2)}_u e^x$$

$$L[ue^x] = x^3 e^x \\ \left(u'' + p'(a)u' + p(a)u \right) e^x = x^3 e^x$$

$$u'' e^x = x^3 e^x$$

$$u'' = x^3$$

$$u' = \frac{x^4}{4} + C$$

$$u = \frac{x^5}{20} + Cx + D \quad C = D = 0$$

$$\text{b) } L[y] = y'' - 2y' + y = (x^3 + x^2 + x + 1) e^x$$

$$y_p = u e^x \quad \text{dove } u \leq 5$$

$$L[ue^x] = u'' e^x = (x^3 + x^2 + x + 1) e^x$$

$$u'' = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$u' = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

$$u = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = (x^3 + x^2 + x + 1) e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x + \underbrace{\left(\frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} \right)}_{y_p} e^x$$

e poi dovete scegliere C_1 e C_2 in modo tale
i dati iniziali soddisfatti

$$y_p(0) = y_p'(0) = 0$$

$$y(0) = C_1 = 1$$

$$y'(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$y = \left[1 - x + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} \right] e^x$$