Serie storiche economiche

4. Numeri indici

Differenze assolute e relative

Evidenziare le differenze nel tempo o nello spazio dell'intensità o frequenza di un fenomeno X. Detto $t+1, \ldots, T$ l'indice temporale e x_t le osservazioni su X,

- Variazione (differenza) assoluta:

$$d_a = x_t - x_{(t-1)}$$

- Variazione relativa:

$$d_r = \frac{x_t - x_{(t-1)}}{x_{(t-1)}} = \frac{x_t}{x_{t-1}} - 1$$

La variazione assoluta è espressa in un'unità di misura mentre la variazione relativa è un numero puro.

Numeri indici

I *numeri indici* sono un rapporto statistico che serve a misurare le variazioni relative nel tempo.
Dato un fenomeno X e due osservazioni x_0 e x_1 in due istanti successivi:

- 0 è la *situazione base*
- 1 la *situazione corrente*

chiamiamo *numero indice* il rapporto:

$$_0I_1 = \frac{x_1}{x_0}$$

Il numero indice $_0I_1$ esprime di quanto è variata l'intensità del fenomeno tra 0 e 1. Con riferimento alla variazione relativa, è

$$\frac{x_1 - x_0}{x_0} = {_0I_1} - 1$$

Base fissa e base mobile

Consideriamo una sequenza di osservazioni:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

rapportando tutte ad una di esse, per esempio x_0, si ottiene la serie dei numeri indici *a base fissa*

$${}_0I_0 = \frac{x_0}{x_0}, {}_0I_1 = \frac{x_1}{x_0}, {}_0I_2 = \frac{x_2}{x_0}, \ldots, {}_0I_n = \frac{x_n}{x_0}$$

altrimenti, rapportando ciascuna alla precedente, si ottiene la serie *a base mobile*:

$${}_0I_1 = \frac{x_1}{x_0}, {}_1I_2 = \frac{x_2}{x_1}, \ldots, {}_{n-1}I_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

Di solito si pone ${}_0I_0 = 100$; in questo caso ${}_{t-1}I_t - 100$ può essere letta direttamente come variazione percentuale.

Proprietà dei numeri indici

Proprietà dei N.I. elementari:

a) Identità: ${}_t I_t = 1$
b) Reversibilità delle basi: ${}_t I_s = \frac{1}{{}_s I_t}$
c) Transitività delle basi (circolarità): ${}_t I_r = {}_t I_q \cdot {}_q I_r$
d) Commensurabilità: i N.I. sono insensibili all'unità di misura
e) Scomposizione delle cause: se un fenomeno può essere ottenuto come prodotto di due "cause", il relativo N.I. è anch'esso rappresentabile come il prodotto dei N.I. delle cause. Es. $v_t = q_t \cdot p_t$ allora: ${}_0 I_t^v = {}_0 I_t^q \cdot {}_0 I_t^p$

Le proprietà b) e c) permettono il cambio di base (per i N.I. a base fissa) e il passaggio da base fissa a base mobile.

I tassi di incremento sono invarianti all'anno base del calcolo

Cambiamento di base

Il *cambio di base* (per esempio da h a k) per un indice in base fissa avviene dividendo ogni termine ${}_hI_t$ della serie per l'indice del periodo "nuova base": ${}_hI_k$. E' infatti:

$$ {}_kI_t = \frac{x_t}{x_k} = \frac{x_t}{x_h} \cdot \frac{x_h}{x_k} = {}_hI_t \cdot \frac{1}{{}_hI_k} = {}_kI_h \cdot {}_hI_t $$

Esempio: da base 0 a base 2 per il quarto periodo

$$ {}_2I_4 = {}_0I_4 \cdot \frac{1}{{}_0I_2} = {}_2I_0 \cdot {}_0I_4 $$

Tale operazione è valida per tutti i termini della serie, pertanto risulta immediato operare in modo vettoriale dividendo *tutta* la serie originaria per lo scalare ${}_kI_h$, che è detto *coefficiente di conversione*.

Da base fissa a base mobile e viceversa

Il passaggio *da una base fissa* (per esempio k) *alla base mobile* avviene dividendo ogni termine (tranne il primo, che non è definito) per l'indice in base fissa relativo al periodo precedente:

$$_{t-1}I_t = {_k}I_t \cdot \frac{1}{_k I_{t-1}} = {_{t-1}}I_k \cdot {_k}I_t$$

Nel caso particolare $k = 0$ per $t = 2$, $_1I_2 = {_1}I_0 \cdot {_0}I_2$.

Il passaggio *dalla base mobile a una base fissa* k per un qualsiasi indice $_{t-1}I_t$ avviene moltiplicando l'indice per tutti i precedenti indici a base mobile da k a $t-1$ (o dividendo, se $k > t$). Più semplicemente, si può calcolare in base 0,

$$_0I_t = {_0}I_1 \cdot {_1}I_2 \dots {_{t-1}}I_t$$

e successivamente basta cambiare di base dividendo per $_0I_k$.

Tassi medi di variazione - 1

Confrontando le misurazioni di un fenomeno x nel tempo su più periodi $0, 1, \ldots, t, \ldots, T$ può essere interessante e utile misurare:

- la variazione *complessiva* da 0 a T
- la variazione *media*

La *variazione complessiva* da 0 a T è ovviamente ${}_0I_T - 1 = \frac{x_T - x_0}{x_0}$.
La corrispondente *variazione media* può essere definita in vari modi a seconda del modo in cui x si evolve tra 0 e T:

Def. "media" secondo Chisini

è il valore $\bar{x}$ che sostituito a ciascuna osservazione mantiene inalterato il risultato della *funzione di circostanza* f:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_T) = f(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x})$$

Esempio: tassi medi di rendimento - 1

Nel caso – ad esempio – di una operazione finanziaria, la *funzione di circostanza* può assumere forme diverse:

- Tasso medio semplice:

$$x_T = x_0 + rx_0 + rx_0 + \ldots + rx_0$$

  per esempio, per un'operazione finanziaria con cedole che *non* vengono reinvestite $(x_T = x_0 + r_1 x_0 + r_2 x_0 + \ldots + r_T x_0)$

- Tasso medio composto (CAGR):

$$x_T = x_0 (1 + r')^T$$

  per esempio per un'operazione finanziaria dove le cedole vengono reinvestite allo stesso tasso $(x_T = x_0(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \ldots (1 + r_T))$

Esempio: tassi medi di rendimento - 2

- Tasso medio semplice: viene calcolato come differenza relativa tra 0 e T divisa per il numero dei periodi

$$r = \frac{1}{T}\frac{x_T - x_0}{x_0} = \frac{1}{T}(\frac{x_1 - x_0}{x_0} + \frac{x_2 - x_1}{x_0} + \ldots + \frac{x_T - x_{T-1}}{x_0})$$

ovvero: $r = \frac{1}{T} {}_0I_T - 1 = \frac{1}{T}\sum_t {}_0I_t - 1$ è la media *aritmetica* degli indici in base fissa meno 1

- Tasso medio composto (CAGR):

$$r' = (\frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdots \frac{x_T}{x_{T-1}})^{\frac{1}{T}} - 1 = (\frac{x_T}{x_0})^{\frac{1}{T}} - 1$$

cosicché $r' = ({}_0I_T)^{\frac{1}{T}} - 1$ è la media *geometrica* degli indici in base mobile meno 1.

Numeri indici sintetici

Un indice sintetico sintetizza (*sic*) la variazione di un aggregato anziché di un valore elementare.

Nel caso, importante, degli *indici dei prezzi* l'aggregato in questione è un *paniere* di consumo (oppure l'intero Prodotto Interno Lordo, il che formalmente non cambia nulla) di cui vogliamo valutare la variazione di prezzo – non di valore totale – mantenendo fisse le quantità.

Si calcola pertanto il rapporto tra il valore del paniere ai prezzi in t e quello dello *stesso* paniere ai prezzi in 0:

$$\frac{v_t}{v_0} = \frac{\sum_i p_{it} q_i}{\sum_i p_{i0} q_i}$$

Quali quantità q_i considerare? q_{i0} o q_{it}?

Indici dei prezzi di Paasche e di Laspeyres

A seconda della scelta del sistema di pesi (le quantità) si ottengono:

- Indice di Laspeyres: ${}_0^pI_T^L = \frac{\sum_i p_{it} q_{i0}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}}$
  se le quantità vengono fissate al tempo base
- Indice di Paasche: ${}_0^pI_T^P = \frac{\sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{i0} q_{it}}$
  se le quantità vengono fissate al tempo corrente

Gli indici sintetici come medie pesate

Gli indici di Paasche e Laspeyres possono essere ottenuti come medie degli indici semplici dei prezzi di ogni bene pesati per l'importanza della spesa dedicata al bene nella spesa complessiva:

- Indice di Laspeyres: ${}_0^p I_T^L = \frac{\sum_i \frac{p_{it}}{p_{i0}} p_{i0} q_{i0}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}}$
  la spesa è considerata in 0
- Indice di Paasche: ${}_0^p I_T^P = \frac{\sum_i \frac{p_{it}}{p_{i0}} p_{i0} q_{it}}{\sum_i p_{i0} q_{it}}$
  la spesa è considerata al tempo corrente

Si noti come la costruzione dell'indice tipo Paasche richieda il ricalcolo dei pesi ad ogni periodo, mentre questi sono determinati *una tantum* in 0 per l'indice tipo Laspeyres.

Proprietà degli indici sintetici

Sono proprietà desiderabili degli indici sintetici:

a)-e) quelle degli indici elementari

f) Proporzionalità: se i prezzi dei k prodotti variano di un fattore a anche l'indice deve variare in proporzione

g) Determinatezza: l'indice sintetico non deve annullarsi o divergere se lo fa un termine della formula

Gli indici di Paasche e Laspeyres non soddisfano c) (transitività) ed e) (scomposizione delle cause). L'indice sintetico di Fisher, media geometrica degli indici Paasche e Laspeyres

$$ {}_0^p I_T^F = \sqrt{{}_0^p I_T^L \cdot {}_0^p I_T^P} $$

soddisfa tali proprietà ed è pertanto detto *numero indice ideale*.

Numeri indici sintetici - valore

Un indice sintetico mostra la variazione di un aggregato anziché di un valore elementare. Generalizziamo quanto visto riguardo agli indici sintetici dei prezzi:

L'aggregato può rappresentare un *valore*: è quindi un'aggregazione di fenomeni elementari del tipo $v_i = q_i \cdot p_i$. Si calcola allora il rapporto tra il valore del paniere in t e quello in 0:

$$ {}_0^v I_t = \frac{v_t}{v_0} = \frac{\sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}} $$

dove prezzi e quantità sono contemporanei.

Numeri indici sintetici - prezzi o quantità

Altrimenti, se si è interessati alla variazione dei *prezzi*, si calcola il rapporto tra il valore del paniere ai prezzi in t e quello dello *stesso* paniere ai prezzi in 0:

$$ {}_0^pI_T = \frac{\sum_i p_{it}q_{ih}}{\sum_i p_{i0}q_{ih}} $$

ponderando con le quantità fissate a un certo istante h

Nel caso degli indici di *quantità*, analogamente, si utilizza una ponderazione fissata *ai prezzi* di un certo periodo h:

$$ {}_0^qI_T = \frac{\sum_i p_{ih}q_{it}}{\sum_i p_{ih}q_{i0}} $$

Alcuni numeri indici notevoli

L'Istat pubblica numerosi indici:

- Indici di valore
  - Fatturato e ordinativi dell'industria
  - Fatturato dei servizi
  - Valore delle vendite del commercio
- Indici dei prezzi
  - Prezzi al consumo (NIC, FOI, IPCA)
  - Prezzi alla produzione
- Indici delle quantità
  - Produzione industriale
  - Volume dell'export e dell'import

con cadenza mensile o trimestrale.

Variazioni tendenziali e congiunturali

Preso un fenomeno misurato a cadenza infra-annuale, tale per cui nell'anno ci sono k periodi (e.g., per i dati trimestrali $k = 4$, mensili $k = 12$, giornalieri $k = 365$), si parla di variazione

- *congiunturale* quando si rapporta il dato corrente x_t al dato precedente x_{t-1}
- *tendenziale* quando si rapporta il dato corrente x_t al dato corrispondente dell'anno precedente x_{t-4}

Per esempio, presi i dati mensili relativi alla produzione auto di dicembre 2018, la variazione

- *congiunturale* sarà misurata rispetto al novembre 2018
- *tendenziale* rispetto al dicembre 2017

Le variazioni congiunturali, a differenza delle tendenziali, risentono della *stagionalità*.

Numeri indici sintetici: scomposizione

Può essere utile scomporre gli indici sintetici in *subindici*. L'indice generale può essere ottenuto anche come media ponderata dei subindici.

Formalmente, considerando tre livelli:

- elementare
- gruppo: $1, \ldots, g, \ldots, G$
- e totale,

per il generico gruppo g contenente i prodotti $1, \ldots, i, \ldots, S$ è

$$
{}_0I_t^g = \frac{\sum_{i=1}^{S} \frac{p_{it}}{p_{i0}} v_{i0}}{\sum_{i=1}^{S} v_{i0}} = \sum_{i=1}^{S} \frac{p_{it}}{p_{i0}} w_{i0}
$$

con $w_{i0} = \frac{v_{i0}}{\sum_{i=1}^{S} v_{i0}}$ e l'indice generale: ${}_0I_t^G = \sum_{g=1}^{G} {}_0I_t^g \cdot w_{i0}$ è la somma pesata delle variazioni dovute a ogni singolo gruppo.

Contributo delle singole componenti

Il calcolo dell'indice per gruppo misura la dinamica dei prezzi per singolo gruppo:

$$ {}_0I_t^g = \sum_{i=1}^{S} \frac{p_{it}}{p_{i0}} \frac{v_{i0}}{\sum_{i=1}^{S} v_{i0}} $$

Il contributo del singolo gruppo g alla dinamica dell'indice generale (*livello generale dei prezzi*) è dato dall'indice di gruppo volte il suo peso sul totale:

$$ C_g = {}_0I_t^g \cdot w_{g0} $$

Esso permette di valutare l'incidenza delle variazioni di prezzo delle singole componenti sulle variazioni dell'indice aggregato.

Variazioni nominali e reali

Un aggregato monetario (misurato in *valore*) può variare sia per effetto di variazioni nel *volume* di beni e servizi sottostanti, che per effetto di una variazione nei prezzi. Dato un generico aggregato $A_t = \sum_i q_{it} \cdot p_{it}$, si indica con *variazione nominale*, o *variazione a prezzi correnti*, la crescita in valore di A nel tempo:

$$\frac{A_t}{A_0} = \frac{\sum_i q_{it} \cdot p_{it}}{\sum_i q_{i0} \cdot p_{i0}}$$

Si indica invece come *variazione reale* o *in volume* o *a prezzi costanti* la variazione in quantità dell'aggregato:

$$\frac{A_{t_{(0)}}}{A_0} = \frac{\sum_i q_{it} \cdot p_{i0}}{\sum_i q_{i0} \cdot p_{i0}}$$

Da prezzi correnti a costanti: il deflazionamento

L'aggregato $A_{t_{(0)}}$ può essere calcolato direttamente moltiplicando le quantità al tempo t per i prezzi al tempo 0, oppure indirettamente ricorrendo a numeri indici di prezzo e quantità:

$$A_{t_{(0)}} = \sum p_0 q_t = \sum p_t q_t \cdot \frac{\sum p_0 q_t}{\sum p_t q_t} = \frac{A_t}{{}_0^p I_t^P}$$

dicvidendo l'aggregato a valori correnti per un indice dei prezzi di Paasche. In questo caso si parla di *deflazionamento*. Oppure si può procedere per *estrapolazione*:

$$A_{t_{(0)}} = \sum p_0 q_t = \sum p_0 q_0 \cdot \frac{\sum p_0 q_t}{\sum p_0 q_0} = A_0 {}_0^q I_t^L$$

moltiplicando il valore corrente dell'aggregato in 0 per un indice di quantità di tipo Laspeyres.