

1

Considera le distribuzioni: $\delta(x-x_0)$, $\text{sgn}(x-x_0)$ e $|x-x_0|$. Usando le operazioni di moltiplicazione per variabile e derivata per distribuzioni, prova le seguenti identità:

- $\frac{d}{dx}\text{sgn}(x-x_0) = 2\delta(x-x_0)$
- $(x-x_0)\text{sgn}(x-x_0) = |x-x_0|$
- $\frac{d}{dx}|x-x_0| = \text{sgn}(x-x_0)$

Nota che la terza identità si può ottenere anche scrivendo la distribuzione $|x-x_0|$ come prodotto, usando la seconda identità, e applicando la regola di Leibniz.

2

Si consideri l'equazione di Abraham-Lorentz

$$m\dot{v} = mt_0\ddot{v} + F_{\text{ext}} ,$$

che descrive il moto di una particella carica sottoposta ad una forza esterna, tenendo conto dell'emissione di onde elettromagnetiche da parte della particella stessa. La costante t_0 è positiva. Si mostri che per una generica forza esterna $F_{\text{ext}}(t) \in L^2(\mathbb{R})$ non esiste una soluzione causale dell'equazione. [*Suggerimento*: si risolva per \dot{v} come funzione di F_{ext} , usando il metodo della funzione di Green, e si mostri che la soluzione causale dà luogo a un integrale genericamente divergente e dunque non è accettabile.]