

Analisi Matematica II

Appunti delle lezioni tenute dalla Prof.ssa R. Toader

Università di Trieste, CdL Ingegneria Industriale e CdL
Ingegneria Navale

a.a. 2024/2025

La parte del corso riguardante le equazioni differenziali non è richiesta all'esame.

1 Equazioni differenziali - prime definizioni

Le equazioni differenziali sono uno degli strumenti principali utilizzati per modellizzare i fenomeni della Natura, nel senso più ampio del termine. Le troviamo in tutte le Scienze, principalmente nella Fisica, ma anche in ambito economico, biologico, medico, sociale. Esse sono catalogabili in due tipi diversi: le equazioni differenziali ordinarie e le equazioni differenziali alle derivate parziali. In queste note, tratteremo solo delle prime.

Consideriamo un'espressione del tipo

$$u' = f(t, u), \quad (1)$$

che chiameremo “equazione differenziale in forma canonica”, e iniziamo a spiegarne il significato. Qui f è una funzione continua definita su un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, a valori in \mathbb{R}^N .

Definizione 1 Diremo che una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è “soluzione di (1) in I ” se:

- I è un intervallo non degenere di \mathbb{R} ,
- $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$,
- u è derivabile su I ,
- $u'(t) = f(t, u(t))$ per ogni $t \in I$.

Ricordiamo che

$$u'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{u(s) - u(t)}{s - t} \in \mathbb{R}^N$$

è il “vettore derivata” di u in t .¹ Spesso, pensando ai modelli della meccanica, $u(t)$ si può interpretare come “vettore posizione al tempo t ” e $u'(t)$ come “vettore velocità al tempo t ”. Si chiama “orbita” della soluzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ l’insieme immagine $u(I) = \{u(t) : t \in I\}$, mentre chiameremo “traiettoria” di u il suo grafico $\{(t, u(t)) : t \in I\}$. Lo spazio \mathbb{R}^N si chiama “spazio delle fasi”.

Nelle applicazioni ci si trova spesso ad affrontare la ricerca di una soluzione dell’equazione differenziale che soddisfi una “condizione iniziale” del tipo

$$u(t_0) = u_0.$$

Avendo in mente i modelli della meccanica, si dice che la “posizione” di u “al tempo iniziale” t_0 è u_0 . Ci si trova così a dover risolvere il “problema di Cauchy”

$$(PC) \quad \begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

dove $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione continua, e $(t_0, u_0) \in \Omega$.

Definizione 2 Diremo che una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è “soluzione del problema (PC)” se:

- I è un intervallo contenente al suo interno t_0 ,
- u è soluzione di (1) in I ,
- $u(t_0) = u_0$.

Risulta molto utile la seguente formulazione equivalente del problema.

Teorema 1 Una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è soluzione del problema (PC) se e solo se:

- I è un intervallo contenente al suo interno t_0 ,
- $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$,
- u è continua su I ,
- $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$ per ogni $t \in I$.

Ricordiamo a questo proposito che l’integrale di una funzione a valori vettoriali $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, con

$$g(t) = (g_1(t), \dots, g_N(t)),$$

è definito da

$$\int_a^b g(t) dt = \left(\int_a^b g_1(t) dt, \dots, \int_a^b g_N(t) dt \right).$$

Esso è quindi un vettore di \mathbb{R}^N .

¹Siano $a = \inf I$ e $b = \sup I$. Se $a \in I$, allora $u'(a)$ sarà un limite destro. Similmente, se $b \in I$, allora $u'(b)$ sarà un limite sinistro.

Dimostrazione del Teorema. Dobbiamo dimostrare una doppia implicazione. Se u è una soluzione del problema (PC), allora

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^t u'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

il che dimostra una delle due implicazioni.

Viceversa, se u è una funzione continua per cui si abbia

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

si ha che $u(t_0) = u_0$, e la funzione $s \mapsto f(s, u(s))$ è continua. Quindi u è derivabile, e si ha

$$u'(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds = f(t, u(t)),$$

per ogni $t \in I$. ■

Spesso le equazioni differenziali coinvolgono anche derivate di ordine più elevato. Un tipico esempio è dato dall'equazione di Newton $F = ma$. In questo caso, se $x(t)$ denota la posizione di un oggetto di massa m al tempo t , l'equazione si può solitamente scrivere come

$$x'' = \frac{1}{m} F(t, x, x').$$

Qui F dipende dal tempo t , dalla posizione x e dalla velocità x' . Definendo $y = x'$, $u = (x, y)$, e $f(t, u) = (y, \frac{1}{m} F(t, x, y))$, l'equazione si può scrivere come

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{1}{m} F(t, x, y) \end{cases},$$

ossia $u' = f(t, u)$, che ne è la forma canonica (1). Il problema di Cauchy in questo caso avrà una condizione iniziale del tipo $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = y_0$.

In generale, un'equazione differenziale "di ordine n " si presenta nella forma

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

Essa può essere ricondotta alla forma canonica (1), con $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, ponendo

$$u_1 = x, u_2 = x', \dots, u_n = x^{(n-1)}, \quad f(t, u) = (u_2, u_3, \dots, g(t, u_1, u_2, \dots, u_n)).$$

Il corrispondente problema di Cauchy avrà come condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

2 Alcune semplici equazioni

Iniziamo a considerare il caso scalare $N = 1$: in generale, purtroppo, anche in questo caso “semplice”, trovare una soluzione esplicita di un’equazione differenziale può essere un’impresa senza speranza.

Consideriamo dapprima l’equazione differenziale

$$u' = a(t)u + b(t),$$

dove $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni continue. Si parla in questo caso di “equazione differenziale lineare”. Studiamo il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = a(t)u + b(t) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Notiamo che, se u è una soluzione, allora

$$\frac{d}{dt} \left[u(t) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} \right] = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} (u'(t) - a(t)u(t)) = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} b(t);$$

integrando su $[t_0, t]$,

$$u(t) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} - u_0 = \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\sigma} a(s) ds} b(\sigma) d\sigma,$$

da cui ricaviamo la formula risolutiva

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left(u_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\sigma} a(s) ds} b(\sigma) d\sigma \right).$$

Ad esempio, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3u + t^2 \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

ha come soluzione

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\int_0^t 3 ds} \int_0^t e^{-\int_0^{\sigma} 3 ds} \sigma^2 d\sigma \\ &= e^{3t} \int_0^t e^{-3\sigma} \sigma^2 d\sigma \\ &= \frac{2}{27} (e^{3t} - 1) - \frac{1}{3} t^2 - \frac{2}{9} t. \end{aligned}$$

Analizziamo ora le “equazioni differenziali a variabili separabili”:

$$u' = e(t)g(u).$$

Qui $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ ha come dominio un intervallo J che contiene u_0 , ed $e : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ha come dominio un intervallo \mathcal{I} che contiene t_0 . Supponiamo inoltre $g(u) \neq 0$

per ogni u nell'intervallo J , per cui l'equazione si può scrivere l'equazione nella forma equivalente

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = e(t), \quad u(t) \in J. \quad (2)$$

Come sopra, studiamo il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = e(t)g(u) \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

Supponendo che $u([t_0, t])$ sia contenuto in J si può integrare (2) su $[t_0, t]$ e, con un cambio di variabile, si ottiene

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^t e(s) ds.$$

Se denotiamo con $\mathcal{P} : J \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di $1/g$, otteniamo

$$\mathcal{P}(u(t)) = \mathcal{P}(u_0) + \int_{t_0}^t e(s) ds,$$

e siccome \mathcal{P} è strettamente monotona (avendo derivata sempre diversa da zero), possiamo scrivere

$$u(t) = \mathcal{P}^{-1}\left(\mathcal{P}(u_0) + \int_{t_0}^t e(s) ds\right).$$

Ad esempio, vediamo come trattare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sin t (u^2 + 1) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Abbiamo che

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{u^2 + 1} = \int_0^t \sin s ds = 1 - \cos t,$$

da cui

$$\arctan u(t) = \arctan u_0 + 1 - \cos t,$$

ossia

$$u(t) = \tan\left(\arctan u_0 + 1 - \cos t\right).$$

Si noti che l'espressione è ben definita se t varia in un intorno di 0, ma potrebbe non esserlo per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Come secondo esempio, cerchiamo una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{1 + 2t}{\cos u} \\ u(0) = \pi. \end{cases}$$

Abbiamo che

$$\int_{\pi}^{u(t)} \cos u \, du = \int_0^t (1 + 2s) \, ds = t + t^2,$$

da cui

$$\sin u(t) = t + t^2.$$

Ora bisogna fare attenzione che ci troviamo con $u(t)$ sull'intervallo contenente π dove la funzione \sin è strettamente monotona, cioè in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Definendo $w(t) = u(t) - \pi$, avremo che $w(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\sin w(t) = \sin(u(t) - \pi) = -\sin u(t) = -(t + t^2),$$

per cui $w(t) = \arcsin(-(t + t^2)) = -\arcsin(t + t^2)$, e quindi

$$u(t) = \pi + w(t) = \pi - \arcsin(t + t^2).$$

3 Il problema di Cauchy: esistenza e unicità

3.1 Esistenza locale

Nel 1890 Giuseppe Peano ha dimostrato il seguente risultato di “esistenza locale”.

Teorema 2 (di Peano) *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione continua. Per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega$, esiste un $r_0 > 0$ tale che il problema*

$$(PC) \quad \begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

ha una soluzione $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Si noti che la soluzione potrebbe non essere unica. Ad esempio, sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(u) = 2\sqrt{|u|}.$$

(Qui la funzione f non dipende esplicitamente da t . Si ha pertanto a che fare con un’“equazione differenziale autonoma”.) Si vede subito che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ha la soluzione costante $u(t) = 0$, ma anche la soluzione

$$u(t) = t|t| = \begin{cases} t^2 & \text{se } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Inoltre, ce ne sono infinite altre, date da

$$u(t) = \begin{cases} (t - c)^2 & \text{se } t \geq c \\ 0 & \text{se } t < c, \end{cases}$$

dove $c \geq 0$ è una costante arbitraria, oppure

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \geq c \\ -(t-c)^2 & \text{se } t < c, \end{cases}$$

dove $c \leq 0$, o anche

$$u(t) = \begin{cases} (t-c_2)^2 & \text{se } t \geq c_2 \\ 0 & \text{se } c_1 < t < c_2 \\ -(t-c_1)^2 & \text{se } t < c_1, \end{cases}$$

con $c_1 \leq 0 \leq c_2$.

Per avere anche l'unicità della soluzione, è necessario introdurre delle ipotesi aggiuntive sulla funzione f .

3.2 Alcune premesse sugli spazi metrici completi

Introduciamo ora il concetto di “completezza” per uno spazio metrico E . Diremo che $(a_n)_n$ è una “successione di Cauchy” in E se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : [m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n}] \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

Lo spazio metrico E si dirà “completo” se ogni successione di Cauchy ha un limite in E .

Si vede facilmente che, se $(a_n)_n$ ha un limite $\ell \in E$, allora è di Cauchy. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, per m e n grandi si avrà che

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, \ell) + d(\ell, a_n) < 2\varepsilon.$$

Il viceversa non è sempre vero (ad esempio, \mathbb{Q} non è completo). Si può però dimostrare che \mathbb{R} è completo, così come ogni \mathbb{R}^N (e quindi, in particolare, anche \mathbb{C}).

Nel seguito, considereremo l'insieme $C([a, b], \mathbb{R}^N)$, costituito dalle funzioni continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Si può definire in esso una norma:

$$\|f\|_\infty = \max\{\|f(x)\| : x \in [a, b]\};$$

sono infatti soddisfatte le quattro proprietà

- a) $\|f\|_\infty \geq 0$;
- b) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$;
- c) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$;
- d) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Una volta verificate le proprietà della norma, è possibile definire la distanza

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty,$$

Valgono infatti le seguenti proprietà:

- a) $d(f, g) \geq 0$;
- b) $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$;
- c) $d(f, g) = d(g, f)$;
- d) $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$.

A questo punto $C([a, b], \mathbb{R}^N)$ risulta essere uno spazio metrico. Si può dimostrare che anch'esso è completo.

Nel seguito, se per una successione $(f_n)_n$ in $C([a, b], \mathbb{R}^N)$ si ha che $\lim_n f_n = f$, ossia $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$, diremo che essa converge a f *uniformemente*.

Dato uno spazio metrico E , diremo che una funzione $\varphi : E \rightarrow E$ è una “contrazione” se, per un certo $\alpha < 1$, si ha

$$d(\varphi(v), \varphi(w)) \leq \alpha d(v, w),$$

per ogni $v, w \in E$. Enunciamo il “teorema delle contrazioni”.

Teorema 3 *Se E è uno spazio metrico completo e $\varphi : E \rightarrow E$ è una contrazione, allora esiste un unico $x \in E$ tale che $\varphi(x) = x$. Inoltre, scegliendo $x_0 \in E$ arbitrariamente, la successione $(x_n)_n$ definita da*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

è tale che $\lim_n x_n = x$.

Siccome $\varphi(x) = x$, si dice che x è un “punto fisso” di φ .

Dimostrazione. Consideriamo la successione $(x_n)_n$ definita come nell’enunciato, con $x_0 \in E$ arbitrario. Dimostriamo che è una successione di Cauchy. Osserviamo che, se m e n sono due numeri naturali, con $m < n$, si ha

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

Dimostriamo per induzione che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale la seguente proposizione:

$$(P_k) \quad d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^k d(x_0, x_1).$$

Infatti, se $k = 0$ si ha chiaramente l’uguaglianza, per cui (P_0) è vera. Supponiamo ora vera (P_k) , per un certo $k \in \mathbb{N}$; allora

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) = d(\varphi(x_k), \varphi(x_{k+1})) \leq \alpha d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^{k+1} d(x_0, x_1),$$

per cui è vera anche (P_{k+1}) .

Usando (P_k) , abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
 d(x_m, x_n) &\leq \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k d(x_0, x_1) \\
 &\leq \alpha^m d(x_0, x_1) \sum_{k=0}^{n-1-m} \alpha^k \\
 &= \alpha^m d(x_0, x_1) \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \\
 &\leq \alpha^m \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha}.
 \end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, siccome $\alpha \in [0, 1]$ esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \alpha^m \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} < \varepsilon.$$

Ne segue che

$$n > m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

per cui $(x_n)_n$ è di Cauchy. Siccome E è completo, esiste il limite di $(x_n)_n$. Sia

$$\lim_n x_n = x \in E.$$

Allora, essendo φ continua,

$$\varphi(x) = \varphi(\lim_n x_n) = \lim_n \varphi(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x,$$

il che dimostra che x è un punto fisso di φ .

Resta da dimostrare che il punto fisso è unico. Supponiamo che x' sia anch'esso un punto fisso di φ . Allora

$$d(x, x') = d(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \alpha d(x, x'),$$

e siccome $\alpha < 1$, deve essere $x = x'$. ■

3.3 Esistenza e unicità locale

Definizione 3 Diremo che la funzione continua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile se per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ (ossia chiuso e limitato) esiste una costante $L_K > 0$ tale che

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L_K \|v - w\|,$$

per ogni (t, v) e (t, w) in K .

Si può dimostrare la seguente

Proposizione 1 Ogni funzione di classe C^1 è localmente lipschitziana.

Enunciamo ora il teorema che ci interessa.

Teorema 4 (di Cauchy–Lipschitz) Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione continua, localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Allora per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega$ esiste un $r_0 > 0$ tale che il problema (PC) ha una ed una sola soluzione $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Inoltre, la successione di funzioni $(u_n)_n$, definita da

$$u_0(t) = u_0, \quad u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds,$$

è tale che $\lim_n u_n = u$, uniformemente su $[t_0 - r_0, t_0 + r_0]$.

Dimostrazione. Per semplicità, supporremo $N = 1$; il caso generale si tratta in modo analogo. Siano $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tali che

$$K := [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times [u_0 - r_2, u_0 + r_2] \subseteq \Omega,$$

sia $L_K > 0$ la relativa costante di Lipschitz, e sia

$$M = \max\{|f(t, u)| : (t, u) \in K\}.$$

Scegliamo r_0 in questo modo:

$$r_0 = \min \left\{ r_1, \frac{r_2}{M}, \frac{1}{L_K + 1} \right\}.$$

Poniamo $I_0 = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$ e

$$E = \{u \in C(I_0, \mathbb{R}^N) : \|u - u_0\|_\infty \leq r_2\}.$$

(Qui u_0 denota la funzione costante con quel valore.) Essendo un sottoinsieme chiuso di $C(I_0, \mathbb{R}^N)$, che è completo, risulta anch'esso completo. Sia φ la funzione che associa ad ogni $v \in E$ la funzione $\varphi(v) : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da

$$[\varphi(v)](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds.$$

Dimostriamo che $\varphi(v) \in E$. Infatti, $\varphi(v)$ è una funzione continua, e si ha

$$|[\varphi(v)](t) - u_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, v(s))| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq r_2.$$

Quindi, abbiamo definito una funzione $\varphi : E \rightarrow E$. Notiamo inoltre che, prese v, w in E , si ha

$$\begin{aligned} \|\varphi(v) - \varphi(w)\|_\infty &= \sup\{ |[\varphi(v)](t) - [\varphi(w)](t)| : t \in I_0 \} \\ &= \sup \left\{ \left| \int_{t_0}^t (f(s, v(s)) - f(s, w(s))) ds \right| : t \in I_0 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left| \int_{t_0}^t |f(s, v(s)) - f(s, w(s))| ds \right| : t \in I_0 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left| \int_{t_0}^t L_K |v(s) - w(s)| ds \right| : t \in I_0 \right\} \\ &\leq L_K r_0 \|v - w\|_\infty. \end{aligned}$$

Ponendo $\alpha = L_K r_0$, si ha quindi che $\alpha < 1$ e

$$\|\varphi(v) - \varphi(w)\|_\infty \leq \alpha \|v - w\|_\infty.$$

La funzione $\varphi : E \rightarrow E$ è pertanto una contrazione, e per il Teorema delle Contrazioni esiste un unico $u \in E$ tale che $\varphi(u) = u$. Allora

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds, \quad \text{per ogni } t \in I_0,$$

per cui $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una soluzione del nostro problema. Il Teorema delle Contrazioni assicura inoltre che la successione $(u_n)_n$ definita iterativamente in E da $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ converge a u , uniformemente. ■

3.4 L'unicità in grande

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 2\sqrt{|u|} \\ u(0) = -1. \end{cases}$$

Poiché $u(0) = -1$, per continuità la soluzione u è negativa in un intorno di $t_0 = 0$; finché $u(t)$ non si annulla si può applicare il metodo di separazione delle variabili, che ci porta alla formula

$$u(t) = -(t - 1)^2.$$

Tale funzione si annulla per $t = 1$, dunque il metodo fornisce una soluzione definita nell'intervallo $] - \infty, 1]$. In tale intervallo la soluzione è unica. Nel punto $(1, 0)$ il campo vettoriale cessa di essere localmente lipschitziano; da tale punto si biforcano infinite soluzioni per $t > 1$. In particolare, le funzioni

$$u_c(y) = \begin{cases} -(t - 1)^2 & \text{se } t \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < t < c \\ (t - c)^2 & \text{se } t \geq c, \end{cases}$$

al variare di $c > 1$, sono tutte soluzioni del problema di Cauchy in oggetto. Questo esempio dimostra che può esserci unicità locale ma non globale. La perdita dell'unicità nell'esempio precedente è dovuta al fatto che, pur essendoci unicità locale in un intorno di t_0 , la traiettoria della soluzione passa per un punto in cui si perdono la locale lipschitzianità del campo vettoriale e l'unicità delle soluzioni ivi passanti.

Teorema 5 *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione continua, localmente lipschitziana e siano $u_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$, $u_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ soluzioni del problema (PC), con I_1, I_2 intervalli aperti. Allora $u_1 = u_2$ su $I_1 \cap I_2$.*

Dimostrazione. Sia $J = \{t \in I_1 \cap I_2 : u_1(s) = u_2(s) \text{ per ogni } s \in [t_0, t]\}$. Per assurdo, sia $t_1 = \sup J < \sup I_1 \cap I_2$, per cui $t_1 \in I_1 \cap I_2$. Applicando il Teorema di Cauchy–Lipschitz al problema di Cauchy con condizione iniziale $u(t_1) = u_1(t_1)$, si trova una contraddizione. Si giunge poi ad un'analogha contraddizione anche se $\inf J > \inf I_1 \cap I_2$. ■

4 Prolungabilità ed esistenza globale

Definizione 4 *Sia $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una soluzione di (1). Diremo che una funzione $u_* : I_* \rightarrow \mathbb{R}^N$ è un “prolungamento” di u se I è un sottoinsieme proprio di I_* e u_* è anch'essa una soluzione di (1). Si dice che u è una “soluzione massimale” se non ammette prolungamenti. Il suo intervallo di definizione I viene allora detto “intervallo massimale di esistenza” di u .*

Proposizione 2 *L'intervallo massimale di esistenza di una soluzione è un intervallo aperto.*

Dimostrazione. Se per assurdo l'intervallo massimale I contenesse il suo estremo destro $b = \max I$, potrei considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = f(t, v) \\ v(b) = u(b) \end{cases}$$

e trovarne una soluzione $v : [b - \delta, b + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^N$, per un certo $\delta > 0$. Sia allora $u_* : I \cup [b, b + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da

$$u_*(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t \in I \\ v(t) & \text{se } t \in]b, b + \delta]. \end{cases}$$

Si può verificare che u_* è derivabile (anche nel punto b) ed è un prolungamento di u , in contraddizione con l'ipotesi. Analogamente se I contenesse il suo estremo sinistro. ■

Teorema 6 Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione continua, localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Allora ogni soluzione u del problema (PC) si può prolungare in modo univoco a un intervallo massimale $] \alpha, \omega [$, con $-\infty \leq \alpha < \omega \leq +\infty$.

Dimostrazione. Si consideri l'insieme \mathcal{S} di tutte le possibili soluzioni del problema (PC). Ogni $u \in \mathcal{S}$ avrà per dominio un intervallo, che indichiamo con I_u . Sia $I_* = \cup_{u \in \mathcal{S}} I_u$ e si definisca $u_* : I_* \rightarrow \mathbb{R}^N$ ponendo $u_*(t) = u(t)$ se $t \in I_u$. Bisogna verificare che questa è una buona definizione, cioè che il valore di $u_*(t)$ non dipende dalla scelta dell'intervallo I_u a cui t appartiene. Sia dunque $t \in I_u \cap I_v$, dove $u : I_u \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $v : I_v \rightarrow \mathbb{R}^N$ sono due soluzioni del problema (PC). Per l'unicità, si ha che $u = v$ su $I_u \cap I_v$, per cui $u(t) = v(t)$.

Se ora $u^* : I^* \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una soluzione che prolunga $u_* : I_* \rightarrow \mathbb{R}^N$, allora $u^* \in \mathcal{S}$, perciò per costruzione $I^* \subseteq I_*$. Quindi u_* non ammette prolungamenti: è una soluzione massimale. ■

Teorema 7 Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione continua, localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile, e sia u soluzione del problema (PC) sul suo intervallo massimale $] \alpha, \omega [$. Allora per ogni compatto $K_0 \subseteq \Omega$ contenente (t_0, u_0) esistono un $a_0 \in] \alpha, t_0 [$ e un $b_0 \in] t_0, \omega [$ tali che

$$t \in] \alpha, a_0 [\cup] b_0, \omega [\Rightarrow (t, u(t)) \notin K_0.$$

Per la dimostrazione di questo teorema, avremo bisogno del seguente risultato preliminare.

Lemma 1 Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione continua, localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile, e sia u soluzione del problema (PC) su un intervallo $] a, b [$. Se esiste una successione crescente $(t_n)_n$ in $] t_0, b [$ tale che $t_n \rightarrow b^-$ e $u(t_n) \rightarrow \bar{u}$, per un certo $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$, con $(b, \bar{u}) \in \Omega$, allora la soluzione u è prolungabile all'intervallo $] a, b [$.

Dimostrazione. Definiamo la funzione $\tilde{u} :] a, b [\rightarrow \mathbb{R}^N$ in questo modo:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t < b \\ \bar{u} & \text{se } t = b. \end{cases}$$

Siccome

$$u(t_n) = u_0 + \int_{t_0}^{t_n} f(s, u(s)) ds,$$

passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$\tilde{u}(b) = u_0 + \int_{t_0}^b f(s, u(s)) ds = u_0 + \int_{t_0}^b f(s, \tilde{u}(s)) ds,$$

e pertanto

$$\tilde{u}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{u}(s)) ds, \quad \text{per ogni } t \in]a, b].$$

Se dimostriamo che \tilde{u} è continua, per il Teorema 1 avremo che essa è soluzione del problema (PC) sull'intervallo $]a, b]$, quindi è un prolungamento di u . Faremo quindi vedere che \tilde{u} è continua anche in b , ossia che $\lim_{t \rightarrow b^-} u(t) = \bar{u}$.

Siano $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tali che

$$K := [b - r_1, b + r_1] \times \bar{B}(\bar{u}, r_2) \subseteq \Omega,$$

e sia

$$M = \max\{\|f(t, u)\| : (t, u) \in K\}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \max\{4Mr_1, r_2\}$. Esiste un \bar{n} tale che, se $n \geq \bar{n}$, allora

$$b - t_n < \frac{\varepsilon}{4M} < r_1, \quad \|u(t_n) - \bar{u}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vogliamo ora dimostrare che

$$t \in [t_{\bar{n}}, b[\Rightarrow \|u(t) - u(t_{\bar{n}})\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per assurdo, supponiamo che l'insieme

$$E = \left\{ t \in [t_{\bar{n}}, b[: \|u(t) - u(t_{\bar{n}})\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

sia non vuoto, e poniamo $\tau = \inf E$. Per la continuità, $\|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| = \frac{\varepsilon}{2}$, e quindi $\tau > t_{\bar{n}}$. Notiamo inoltre che

$$\xi \in [t_{\bar{n}}, \tau[\Rightarrow \|u(\xi) - u(t_{\bar{n}})\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow (\xi, u(\xi)) \in K.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| &\leq \sup\{\|u'(\xi)\| : \xi \in [t_{\bar{n}}, \tau]\}(\tau - t_{\bar{n}}) \\ &= \sup\{\|f(\xi, u(\xi))\| : \xi \in [t_{\bar{n}}, \tau]\}(\tau - t_{\bar{n}}) \\ &\leq M(\tau - t_{\bar{n}}) \leq M(b - t_{\bar{n}}) < M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

una contraddizione, essendo $\|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| = \frac{\varepsilon}{2}$. ■

Naturalmente, vale un lemma analogo se $t_n \rightarrow a^+$.

Dimostrazione del Teorema 7. Se $\omega = +\infty$, basta prendere $b_0 > t_0$ sufficientemente grande. Se $\omega \in \mathbb{R}$, supponiamo che esista un compatto $K_0 \subseteq \Omega$ e una successione crescente $(t_n)_n$ in $]t_0, \omega[$ tale che $t_n \rightarrow \omega^-$ e $(t_n, u(t_n)) \in K_0$. Per la compattezza di K_0 , esiste una sottosuccessione $(t_{n_k})_k$ tale che $(t_{n_k}, u(t_{n_k})) \rightarrow (\omega, \bar{u}) \in K_0$, per un certo $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$. Per il Lemma 1, la soluzione u si può estendere a $]\alpha, \omega]$, una contraddizione. Analogo ragionamento per α . ■

Osserviamo che, anche quando l'insieme Ω ha una proiezione sulla coordinata t che coincide con tutto \mathbb{R} , l'intervallo di esistenza massimale $] \alpha, \omega[$ potrebbe essere un sottoinsieme proprio di \mathbb{R} . Ad esempio, sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(u) = u^2$. Si verifica subito che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

ha come soluzione $u(t) = (1 - t)^{-1}$, per cui $] \alpha, \omega[=] - \infty, 1[$.

Per garantire l'“esistenza globale” della soluzione u , è necessario controllare la crescita in norma. Ad esempio, si può dimostrare il seguente risultato, dove $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Teorema 8 *Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione continua, localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Se inoltre esiste una funzione continua $\ell : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ per cui*

$$\|f(t, v)\| \leq \ell(t)(\|v\| + 1), \quad (3)$$

per ogni $(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, allora la soluzione del problema (PC) si può prolungare in modo univoco a tutto \mathbb{R} .

Nella dimostrazione avremo bisogno del seguente

Lemma 2 (di Gronwall) *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $t_0 \in I$ e $\nu : I \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione continua. Se esistono $\alpha, \beta \in [0, +\infty[$ tali che*

$$\nu(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^t \nu(s) ds \right|, \quad \text{per ogni } t \in I,$$

allora

$$\nu(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|}, \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Dimostrazione del Lemma. Consideriamo dapprima l'intervallo $I \cap [t_0, +\infty[$. Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e definiamo la funzione $\phi_\varepsilon : I \cap [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\phi_\varepsilon(t) = \alpha + \varepsilon + \beta \int_{t_0}^t \nu(s) ds.$$

Si noti che $\phi_\varepsilon(t) > \nu(t) \geq 0$. Allora, per ogni $t \in I \cap [t_0, +\infty[$,

$$\phi_\varepsilon'(t) = \beta \nu(t) \leq \beta \phi_\varepsilon(t),$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \ln \phi_\varepsilon(t) \leq \beta.$$

Integrando su $[t_0, t]$,

$$\ln \frac{\phi_\varepsilon(t)}{\phi_\varepsilon(t_0)} \leq \beta(t - t_0),$$

da cui

$$\nu(t) \leq \phi_\varepsilon(t) \leq \phi_\varepsilon(t_0)e^{\beta(t-t_0)} = (\alpha + \varepsilon)e^{\beta(t-t_0)},$$

per ogni $t \in I \cap [t_0, +\infty[$ e ogni $\varepsilon > 0$. Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, si ottiene

$$\nu(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}, \quad \text{per ogni } t \in I \cap [t_0, +\infty[.$$

Consideriamo ora l'intervallo $I \cap]-\infty, t_0]$. Definiamo l'intervallo $J = \{\tau \in \mathbb{R} : \tau = 2t_0 - t, \text{ con } t \in I\}$ e la funzione $w : J \rightarrow [0, +\infty[$ definita da $w(\tau) = \nu(2t_0 - \tau)$. Se $t \in I \cap]-\infty, t_0]$, allora $\tau = 2t_0 - t \in J \cap [t_0, +\infty[$ e

$$w(\tau) = \nu(2t_0 - \tau) \leq \alpha + \beta \int_{2t_0 - \tau}^{t_0} \nu(s) ds = \alpha + \beta \int_{t_0}^{\tau} w(\sigma) d\sigma.$$

Per quanto visto sopra,

$$w(\tau) \leq \alpha e^{\beta(\tau-t_0)}, \quad \text{per ogni } \tau \in J \cap [t_0, +\infty[,$$

per cui

$$\nu(t) \leq \alpha e^{\beta(t_0-t)}, \quad \text{per ogni } t \in I \cap]-\infty, t_0].$$

La dimostrazione è così completa. ■

Dimostrazione del Teorema 8. Sia $u :]\alpha, \omega[\rightarrow \mathbb{R}^N$ una soluzione del problema (PC), definita sul suo intervallo massimale, con $\alpha < t_0 < \omega$. Supponiamo per assurdo che $\omega \in \mathbb{R}$, e poniamo

$$\ell_1 = \max\{\ell(t) : t \in [t_0, \omega]\}, \quad R = [\|u_0\| + \ell_1|\omega - t_0|] e^{\ell_1(\omega-t_0)}.$$

Preso il compatto $K_0 = [t_0, \omega] \times \overline{B}(0, R)$, possiamo applicare il Teorema 7 e trovare un $b_0 \in]t_0, \omega[$ tale che

$$t \in]b_0, \omega[\Rightarrow u(t) \notin \overline{B}(0, R).$$

D'altra parte, per ogni $t \in [t_0, \omega[$,

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &= \left\| u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right\| \\ &\leq \|u_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leq \|u_0\| + \int_{t_0}^t \ell(s)(\|u(s)\| + 1) ds \\ &\leq [\|u_0\| + \ell_1(\omega - t_0)] + \ell_1 \int_{t_0}^t \|u(s)\| ds. \end{aligned}$$

Per il Lemma di Gronwall, con $\nu(t) = \|u(t)\|$, abbiamo che, per ogni $t \in [t_0, \omega[$,

$$\|u(t)\| \leq [\|u_0\| + \ell_1(\omega - t_0)] e^{\ell_1(t-t_0)} < R,$$

una contraddizione. ■

5 Dipendenza dai dati

Nelle applicazioni è importante avere una “dipendenza continua” dai dati del problema che si vuole studiare. Infatti, le misurazioni non sono mai esatte, ma presentano delle piccole imprecisioni, che però non dovrebbero influire troppo sulle previsioni date dal modello matematico.

Nell’enunciato seguente, supponiamo per semplicità che sia $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Teorema 9 *Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione continua, localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile e sia $\ell : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione continua tale che*

$$\|f(t, v)\| \leq \ell(t)(\|v\| + 1), \quad (4)$$

per ogni $(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Sia u la soluzione massimale del problema (PC). Allora u è definita su tutto \mathbb{R} . Inoltre, fissati a, b tali che $a < t_0 < b$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, se $(\tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ soddisfano

$$|\tilde{t}_0 - t_0| + \|\tilde{u}_0 - u_0\| + \|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta,^2$$

allora ogni soluzione massimale \tilde{u} del problema di Cauchy

$$(\widetilde{PC}) \quad \begin{cases} u' = \tilde{f}(t, u) \\ u(\tilde{t}_0) = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

è definita su tutto \mathbb{R} e

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

Dimostrazione. Per il Teorema 8, la soluzione u è definita su tutto \mathbb{R} . Prenderemo inoltre $\delta \in]0, 1]$, per cui si trova facilmente una funzione continua $\hat{\ell} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ tale che, se $\|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta$, allora

$$\|\tilde{f}(t, v)\| \leq \hat{\ell}(t)(\|v\| + 1),$$

per ogni $(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Tutte le soluzioni \tilde{u} sono pertanto definite su tutto \mathbb{R} , e seguendo la dimostrazione del Teorema 8, ponendo $\hat{\ell}_1 = \max\{\hat{\ell}(t) : t \in [a, b]\}$, se $\tilde{t}_0 \in [a, b]$ e $\|\tilde{u}_0 - u_0\| < \delta$ si ha che

$$\|\tilde{u}(t)\| \leq [(\|u_0\| + 1) + \hat{\ell}_1(b - a)]e^{\hat{\ell}_1(b - a)} := R.$$

Sia $K = [a, b] \times \overline{B}(0, R)$, un compatto, sia L_K la relativa costante di Lipschitz di f su K e sia

$$M = \max\{\|f(t, v)\| : (t, v) \in K\}.$$

Siccome $\delta \leq 1$, abbiamo che

$$\max\{\|\tilde{f}(t, v)\| : (t, v) \in K\} \leq M + 1.$$

²Qui $\|g\|_\infty = \sup\{g(t, x) : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N\}$.

Scriviamo

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, \quad \tilde{u}(t) = \tilde{u}_0 + \int_{\tilde{t}_0}^t \tilde{f}(s, \tilde{u}(s)) ds.$$

Allora, per $t > t_0$,

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| &= \left\| u_0 - \tilde{u}_0 + \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{u}(s))) ds + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \tilde{f}(s, \tilde{u}(s)) ds \right\| \\ &\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, \tilde{u}(s))\| ds + \\ &\quad + \int_{t_0}^t \|f(s, \tilde{u}(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{u}(s))\| ds + \left| \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \tilde{f}(s, \tilde{u}(s)) ds \right| \\ &\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\| + L_K \int_{t_0}^t \|u(s) - \tilde{u}(s)\| ds + (b-a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M+1)|t_0 - \tilde{t}_0|. \end{aligned}$$

Per il Lemma di Gronwall,

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| &\leq \left[\|u_0 - \tilde{u}_0\| + (b-a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M+1)|t_0 - \tilde{t}_0| \right] e^{L_K(t-t_0)} \\ &\leq \left[\|u_0 - \tilde{u}_0\| + (b-a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M+1)|t_0 - \tilde{t}_0| \right] e^{L_K(b-a)}. \end{aligned}$$

Analogamente se $t < t_0$. Da qui la conclusione. ■

Si potrebbe dimostrare un risultato più generale, che qui solo enunciamo.

Teorema 10 *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Indichiamo con u la soluzione del problema (PC), definita sull'intervallo massimale $] \alpha, \beta [$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni intervallo compatto $[a, b] \subseteq] \alpha, \beta [$, contenente al suo interno t_0 , esiste un $\delta > 0$ tale che, se $(\tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in \Omega$ e $\tilde{f} \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ soddisfano*

$$|\tilde{t}_0 - t_0| + \|\tilde{u}_0 - u_0\| + \|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta,$$

allora ogni soluzione \tilde{u} del problema di Cauchy

$$(\widetilde{PC}) \quad \begin{cases} u' = \tilde{f}(t, u) \\ u(\tilde{t}_0) = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

si può estendere al dominio $[a, b]$ e

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

6 Equazioni autonome: equilibri e stabilità

Consideriamo un'equazione differenziale autonoma

$$u' = f(u), \tag{5}$$

con $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua. Si dice che $u_0 \in \Omega$ è un “equilibrio” o “punto stazionario” dell’equazione differenziale (5) se $f(u_0) = 0$. In altri termini, la funzione costante $u(t) = u_0$ è una soluzione dell’equazione differenziale (5).

Definizione 5 Diremo che un punto di equilibrio u_0 è “stabile” se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ con la seguente proprietà: se per una soluzione u e per un certo $\tau \in \mathbb{R}$ si ha che $\|u(\tau) - u_0\| < \delta$, allora

$$\|u(t) - u_0\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \geq \tau.$$

Diremo che un equilibrio u_0 è “asintoticamente stabile” se è stabile ed esiste un $\delta' > 0$ con la seguente proprietà: se per una soluzione u e per un certo $\tau \in \mathbb{R}$ si ha che $\|u(\tau) - u_0\| < \delta'$, allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u_0.$$

Nel caso in cui $f(u) = \mathbb{A}u$, con \mathbb{A} una matrice $N \times N$, vale il seguente criterio per la stabilità dell’equilibrio $u_0 = 0$.

Teorema 11 Se gli autovalori della matrice \mathbb{A} hanno tutti parte reale negativa, allora 0 è un equilibrio asintoticamente stabile per l’equazione differenziale $u' = \mathbb{A}u$. Se esiste un autovalore con parte reale positiva, tale equilibrio non è stabile.

Nel caso in cui $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ sia di classe C^1 , abbiamo il seguente.

Teorema 12 (di linearizzazione) Sia u_0 un equilibrio per l’equazione differenziale (5). Se gli autovalori della matrice jacobiana $Jf(u_0)$ hanno tutti parte reale negativa, allora u_0 è asintoticamente stabile. Se esiste un autovalore con parte reale positiva, tale equilibrio non è stabile.

6.1 Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti: classificazione dei punti di equilibrio nel caso planare

Assegnati $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ consideriamo il sistema

$$(SL) \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Il punto $(0, 0)$ è un punto critico e se $ad - bc \neq 0$ l’origine è l’unico punto critico. Osserviamo che se $(x(t), y(t))$ è una soluzione del sistema (SL) allora $x(t)$ e $y(t)$ sono soluzioni dell’equazione

$$(ED) \quad z'' - (a + d)z' + (ad - bc)z = 0.$$

L’equazione caratteristica di (ED) è:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

e $p(\lambda)$ coincide con il polinomio caratteristico associato alla matrice dei coefficienti di (SL) :

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}.$$

Dunque le radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc})$$

sono gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza il comportamento delle soluzioni dipende da λ_1 e λ_2 e distingueremo i casi in cui gli autovalori sono reali distinti, reali coincidenti oppure complesso-coniugati.

Per descrivere il comportamento delle orbite in un intorno del punto critico $(0, 0)$ conviene effettuare una trasformazione lineare che manda il sistema (SL) nella forma canonica.

Caso I: autovalori reali, distinti, non nulli. In questo caso $(a - d)^2 + 4bc > 0$. Supponiamo $\lambda_1 > \lambda_2$. Il sistema in forma canonica è

$$\begin{cases} \xi' = \lambda_1 \xi \\ \eta' = \lambda_2 \eta, \end{cases}$$

con soluzioni

$$\xi(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \quad \eta(t) = C_2 e^{\lambda_2 t},$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti reali.

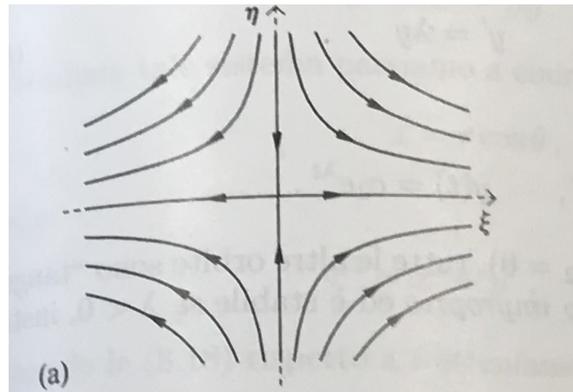
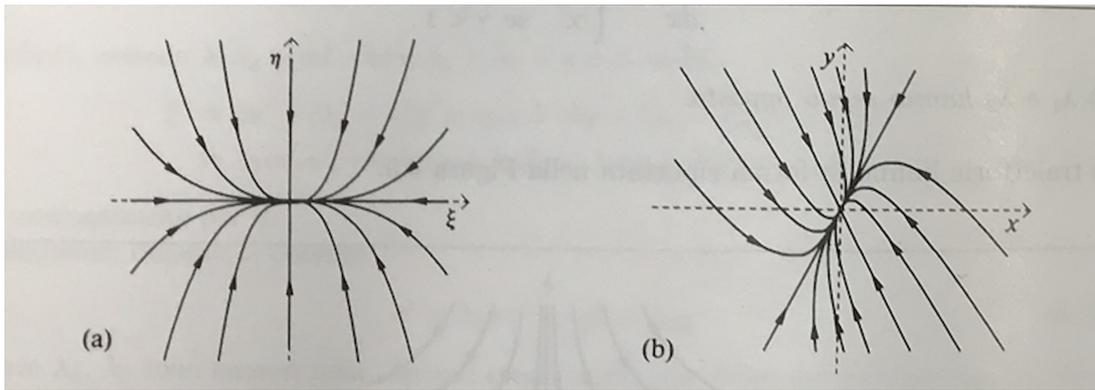
Vogliamo rappresentare le orbite delle soluzioni nel piano delle fasi (ξ, η) . Osserviamo che possiamo scrivere η in funzione di ξ :

$$\eta(t) = \kappa(\xi(t))^{\lambda_2/\lambda_1}$$

con $\kappa = C_2/C_1^{\lambda_2/\lambda_1}$. La forma dell'orbita dipende dunque dal quoziente λ_2/λ_1 e il verso di percorrenza dell'orbita dipende dal segno di λ_1 e λ_2 .

Nel caso in cui λ_1 e λ_2 hanno lo stesso segno il punto critico $(0, 0)$ si dice nodo. Se all'aumentare di t le orbite sono percorse verso l'origine il nodo è asintoticamente stabile, altrimenti esso è instabile. Come orbite particolari abbiamo le quattro semirette sugli assi cartesiani.

Se λ_1 e λ_2 hanno segno opposto l'origine si dice punto di sella ed è instabile. Gli assi coordinati contengono ognuno una coppia di orbite, orientate verso l'origine o in direzione opposta. Queste particolari orbite vengono chiamate separatrici e ogni altra orbita ha le separatrici come asintoti.



Caso II: un solo autovalore $\lambda = \frac{1}{2}(a + d) \neq 0$. In questo caso $\Delta = (a - d)^2 + 4bc = 0$. Se $b = c = 0$ il sistema è del tipo $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$ e le orbite sono rettilinee. Quando $\lambda < 0$ l'origine è asintoticamente stabile mentre è instabile se $\lambda > 0$.

Se invece $b \neq 0$ o $c \neq 0$, con una trasformazione lineare il sistema viene portato nella forma canonica

$$\begin{cases} \xi' = \lambda\xi + \eta \\ \eta' = \lambda\eta, \end{cases}$$

con soluzioni

$$\xi(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} \quad \eta(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

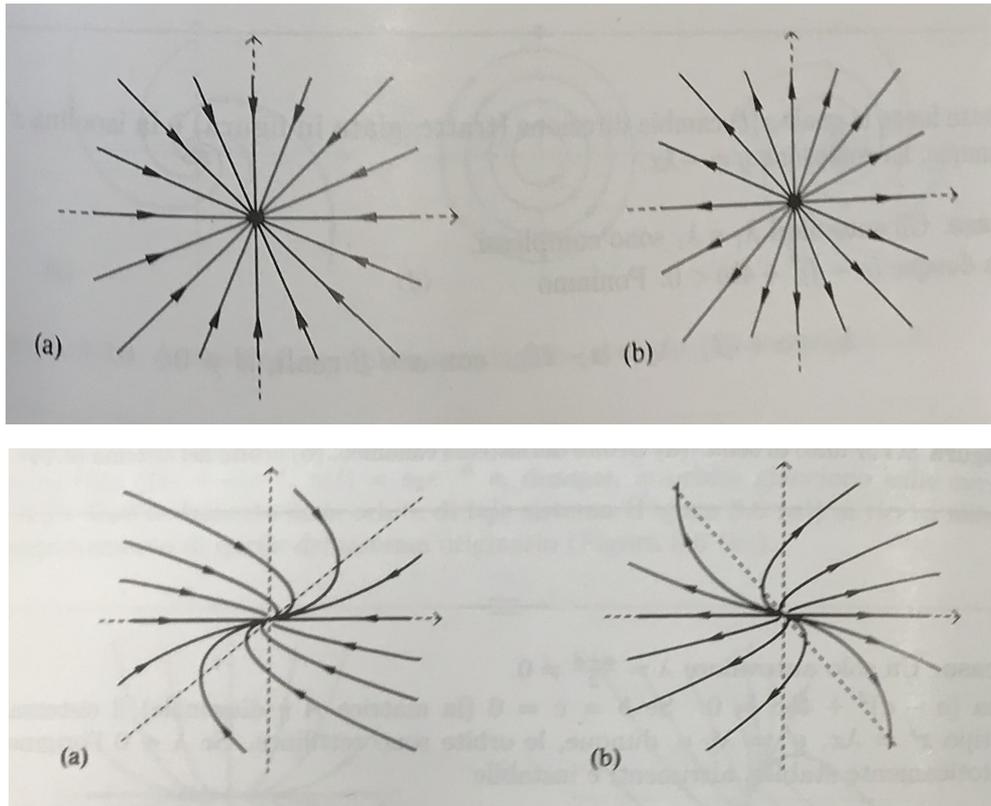
L'origine si dice in questo caso nodo improprio, è stabile per $\lambda < 0$ instabile se $\lambda > 0$.

Caso III: autovalori complessi. In questo caso $\Delta = (a - d)^2 + 4bc < 0$. Poniamo

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$. Con una trasformazione lineare il sistema viene portato nella forma canonica:

$$\begin{cases} \xi' = \alpha\xi - \beta\eta \\ \eta' = \beta\xi + \alpha\eta. \end{cases}$$



È utile in questo caso passare alle coordinate polari

$$\xi = r \cos \theta \quad \eta = r \sin \theta$$

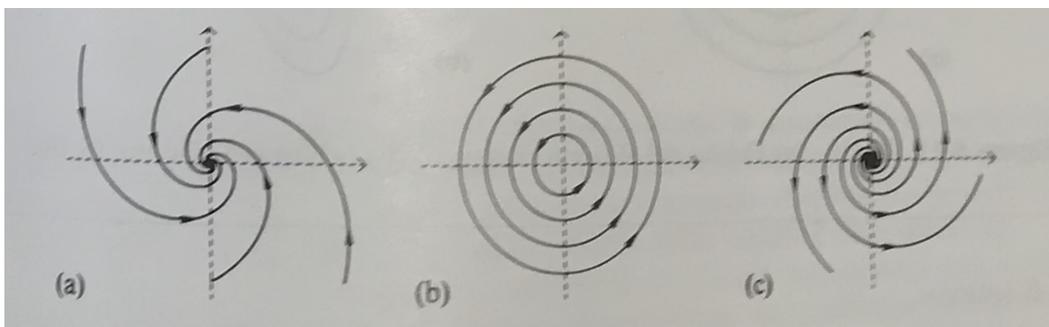
perché le equazioni differenziali per r e θ sono:

$$r' = \alpha r \quad \theta' = \beta.$$

Troviamo dunque

$$r(t) = C_1 e^{\alpha t} \quad \theta(t) = \beta t + C_2.$$

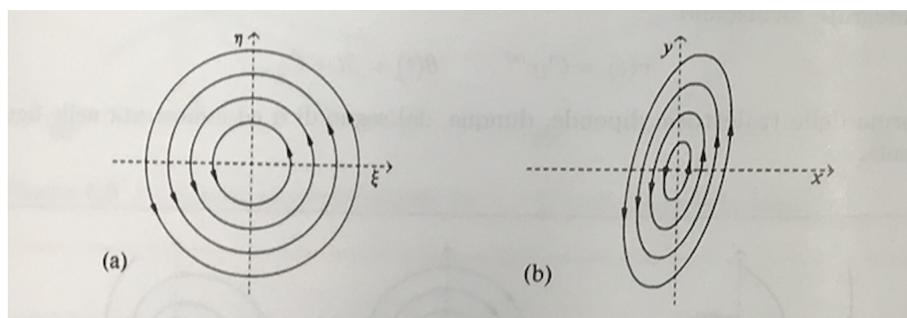
Se $\alpha \neq 0$ le orbite sono delle spirali esponenziali. In questo caso si dice che l'origine è un fuoco ed è asintoticamente stabile se $\alpha < 0$, instabile per $\alpha > 0$.



Se invece $\alpha = 0$ le orbite sono delle circonferenze e si dice che l'origine è un centro. In questo caso essa è stabile ma non asintoticamente stabile. Le

soluzioni sono periodiche di periodo $2\pi/\beta$:

$$\xi(t) = C_1 \cos(\beta t + C_2) \quad \eta(t) = C_1 \sin(\beta t + C_2).$$



Questa sezione, incluse le figure, è presa dal libro *Analisi Matematica: Teorie e applicazioni*, di F. Conti, P. Acquistapace e A. Savojni.

7 Alcuni modelli che utilizzano le equazioni differenziali

7.1 L'equazione del pendolo

Come primo esempio, analizziamo la ben nota equazione del pendolo matematico

$$\vartheta'' + c\vartheta' + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = 0,$$

dove g è la costante di gravità e ℓ è la lunghezza del pendolo. Qui $c \geq 0$ è un coefficiente di attrito.

Ponendo $a = g/\ell$, passiamo al sistema equivalente nel piano delle fasi $(x, y) = (\theta, \theta')$

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -cy - a \sin x. \end{cases}$$

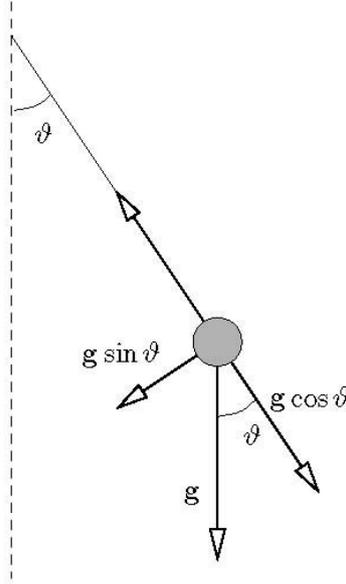
Troviamo facilmente gli equilibri: sono i punti del tipo $(k\pi, 0)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Siccome la funzione seno è 2π -periodica, ci sono due punti di equilibrio geometricamente distinti, $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$, mentre tutti gli altri si ottengono da questi per 2π -periodicità. L'equilibrio $(\pi, 0)$ non è stabile, mentre l'equilibrio $(0, 0)$ è stabile.

Definiamo la seguente “funzione hamiltoniana”

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - a \cos x.$$

Si noti che il sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -a \sin x \end{cases}$$



è del tipo

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

Esso è pertanto un “sistema hamiltoniano”. Per questo tipo di sistemi, se $(x(t), y(t))$ è una qualunque soluzione, allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= -y'(t)x'(t) + x'(t)y'(t) = 0, \end{aligned}$$

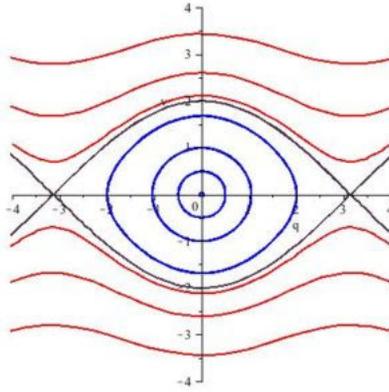
per cui $H(x(t), y(t))$ rimane costante al variare di t . Le orbite delle soluzioni sono pertanto le linee di livello

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = h\},$$

dove $h \in \mathbb{R}$ è una costante che può assumere svariati valori; esse sono visualizzate in figura. Siccome la funzione coseno è 2π -periodica, le linee di livello della funzione hamiltoniana presentano questo tipo di periodicità nella variabile x .

Il punto di equilibrio $(0, 0)$ è un “centro”: tutte le soluzioni vicine sono periodiche. Esso è pertanto stabile. Se indichiamo con $\tau(\alpha)$ il periodo della soluzione con punto iniziale $x(0) = \alpha$, $y(0) = 0$, si vede che, al variare di α in $]0, \pi[$, il periodo $\tau(\alpha)$ è strettamente crescente, e

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \tau(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} \tau(\alpha) = +\infty.$$



Il punto di equilibrio $(\pi, 0)$ è una “sella”. Esso è il punto di arrivo asintotico di una soluzione $(x^*(t), y^*(t))$, detta “eteroclina”, per la quale si ha

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x^*(t) = -\pi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x^*(t) = \pi, \quad \text{e } y^*(t) > 0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

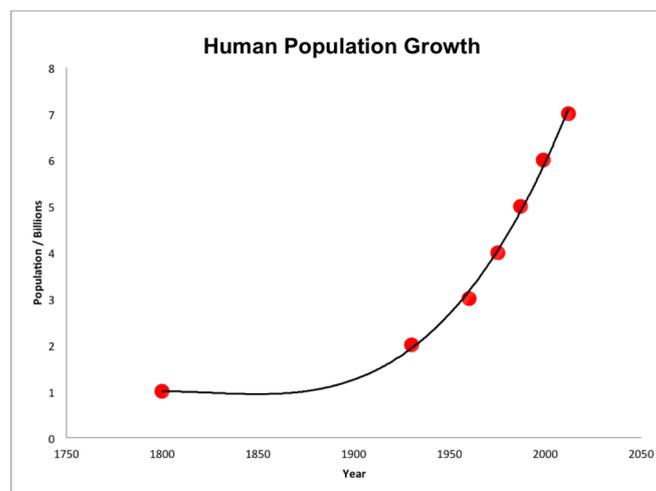
Abbiamo anche la soluzione eteroclina simmetrica $(x_*(t), y_*(t))$, tale che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_*(t) = \pi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_*(t) = -\pi, \quad \text{e } y_*(t) < 0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni la cui orbita attraversa l’asse verticale al di sopra del valore $2\sqrt{a}$ o al di sotto di $-2\sqrt{a}$ non sono periodiche. Esse corrispondono alla situazione fisica in cui il pendolo continua a ruotare in senso antiorario oppure orario, rispettivamente.

7.2 Dinamica delle popolazioni

Vogliamo studiare alcuni modelli di distribuzione di specie (animali o vegetali) in un ecosistema. Cominciamo esaminando la crescita della popolazione umana mondiale negli ultimi due secoli.



Una prima interpretazione, per quanto imprecisa, ci fa pensare a una crescita di tipo esponenziale. Uno dei primi modelli di crescita, proposto da Malthus nel 1798, prevede proprio questo tipo di sviluppo. Esso si basa sulla semplice ipotesi che il tasso di crescita sia proporzionale alla numerosità della popolazione.³

Indichiamo con $u(t)$ una misura di densità della numerosità della specie u al tempo t . Per poter trattare più facilmente il problema con i metodi dell'analisi matematica, si suppone che $u(t)$ vari in modo continuo al variare di t . Questa ipotesi potrebbe sembrare strana, visto che il numero di individui è sempre un intero, ma diventa ragionevole se tale numero è molto elevato e i cambiamenti (nascite, morti o migrazioni) avvengono in modo casuale.

Il modello di Malthus è allora esprimibile con l'equazione differenziale

$$u' = \alpha u,$$

che, com'è noto, ha la soluzione

$$u(t) = u_0 e^{\alpha t}.$$

Una crescita di questo tipo si può verificare in laboratorio osservando una coltura di batteri. Questi si riproducono duplicandosi, a intervalli di tempo regolari, pertanto il loro numero segue una legge di tipo esponenziale. A un certo punto, però, la loro quantità tende a stabilizzarsi verso un limite, noto come *capacità portante*. Ecco che un modello più preciso deve tener conto di una competizione intraspecifica, dovuta alle risorse limitate. Nel 1838, Verhulst ha proposto l'equazione differenziale

$$u' = \alpha u \left(1 - \frac{u}{K}\right),$$

nota come *equazione logistica*. Essa si può risolvere esplicitamente:

$$u(t) = \frac{K u_0 e^{\alpha t}}{K + u_0 (e^{\alpha t} - 1)},$$

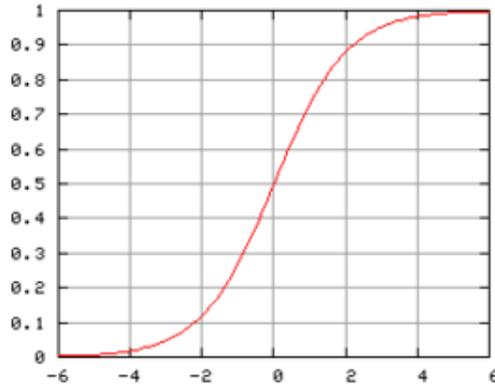
e un possibile grafico è rappresentato nella sottostante figura.

I modelli fin qui descritti possono essere raffinati introducendo ulteriori fattori che possono influenzare la crescita di una popolazione. In generale, le equazioni differenziali presentano una forma del tipo

$$u'(t) = \alpha u(t) f(u(t)),$$

dove la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ può essere anche molto articolata. Ma, volendo essere più precisi, il tasso di crescita potrebbe essere calcolato tenendo conto

³Questo modello si applica piuttosto bene a diverse situazioni, sia della biologia che di altre discipline.



anche di un certo ritardo nella riproduzione. Ecco allora che il modello diventa un'equazione differenziale con ritardo, del tipo

$$u'(t) = \alpha u(t) f(u(t), u(t - \tau)),$$

per un certo $\tau > 0$, dove $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ va specificata. Ad esempio, un modello da studiare potrebbe essere il seguente:

$$u'(t) = \alpha u(t) \left(1 - \frac{u(t - \tau)}{K} \right),$$

Se si volesse essere ancora più precisi, bisognerebbe “pesare” il ritardo, per cui il modello diventerebbe un'equazione integro-differenziale del tipo⁴

$$u'(t) = \alpha u(t) \left(1 - \frac{1}{K} \int_{-\infty}^t w(t - s) u(s) ds \right).$$

In generale, in tutti questi modelli non è possibile esplicitare le soluzioni in termini analitici. Esse possono però essere studiate numericamente.

Le equazioni con ritardo presentano spesso una caratteristica interessante: le soluzioni possono essere oscillanti, e talvolta periodiche nel tempo. Per concludere questa discussione, osserviamo che tutti i modelli presentati potrebbero essere perfezionati introducendo dei *fattori stagionali*, ossia facendo variare i parametri e le funzioni in dipendenza dal tempo. Ad esempio, potremmo avere un'equazione di tipo logistico,

$$u'(t) = \alpha(t) u(t) \left(1 - \frac{u(t)}{K(t)} \right),$$

dove $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni periodiche, il cui periodo rispetta l'andamento delle stagioni di riproduzione o di abbondanza di risorse.

⁴Si noti che, se $w(\cdot) = \delta(\cdot - \tau)$, dove $\delta(\cdot)$ è la *delta di Dirac*, abbiamo

$$\int_{-\infty}^t w(t - s) u(s) ds = \int_{-\infty}^t \delta(t - \tau - s) u(s) ds = u(t - \tau),$$

e ritroviamo così l'equazione differenziale precedente.

7.3 Interazione tra popolazioni

Passiamo ora a discutere un sistema in cui ci sia interazione tra diverse specie. Si possono presentare diverse situazioni: le specie possono essere l'una preda dell'altra, oppure competere per la sopravvivenza, o ancora cooperare, essere in simbiosi. Analizzeremo questi tre casi separatamente supponendo dapprima di avere a che fare con due sole specie. Anche in questa lezione supponiamo che non ci sia dipendenza dalla posizione x .

1. Modello preda-predatore

Il primo modello che presentiamo, forse il più semplice, è quello di Lotka–Volterra per un sistema *preda-predatore*. Indichiamo con $u(t)$ e $v(t)$ la quantità di prede e di predatori, rispettivamente. Il modello è il seguente:

$$\begin{cases} u' = u(\alpha - \beta v), \\ v' = v(-\gamma + \delta u). \end{cases}$$

Qui le costanti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono tutte positive. Notiamo che, in assenza di predatori, le prede seguono l'equazione di Malthus $u' = \alpha u$, per cui la loro crescita è di tipo esponenziale. Introducendo i predatori, il fattore di interazione $-\beta uv$ limita la crescita delle prede. Al contrario, in assenza di prede, i predatori seguono l'equazione $v' = -\delta v$, per cui il loro numero decresce esponenzialmente, e sono destinati a estinguersi. Qualora ci siano prede in giro, il fattore δuv ravviva i predatori, che possono così crescere di numero.

Esamineremo ora il sistema preda-predatore, limitandoci allo studio delle soluzioni positive. Si osserva subito che esiste un punto di equilibrio, precisamente

$$\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

Uno studio della matrice jacobiana in questo punto ci mostra che gli autovalori hanno parte reale nulla. Per studiarne la stabilità, dobbiamo pertanto usare qualche altro stratagemma.

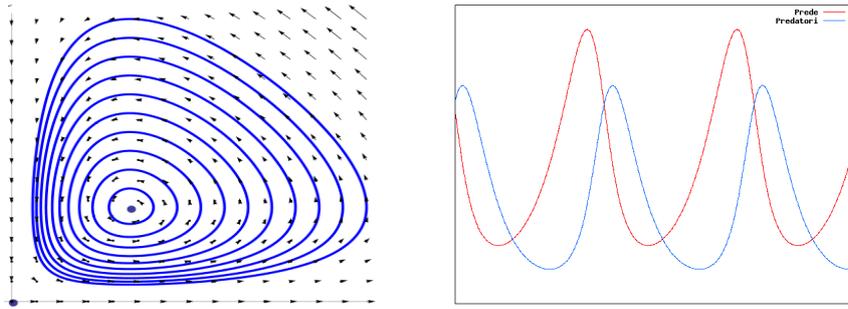
Siccome abbiamo deciso di studiare le soluzioni con $u(t) > 0$ e $v(t) > 0$, definiamo le funzioni $w_1(t) = \ln u(t)$, $w_2(t) = \ln v(t)$. Abbiamo che

$$\begin{cases} w_1'(t) = \frac{u'(t)}{u(t)} = \alpha - \beta v(t) = \alpha - \beta e^{w_2(t)}, \\ w_2'(t) = \frac{v'(t)}{v(t)} = -\gamma + \delta u(t) = -\gamma + \delta e^{w_1(t)}. \end{cases}$$

Per questo sistema c'è una funzione hamiltoniana:

$$H(w_1, w_2) = \delta e^{w_1} - \gamma w_1 + \beta e^{w_2} - \alpha w_2.$$

Le soluzioni stanno sulle linee di livello di questa funzione, che sono tutte curve chiuse. Possiamo visualizzare il comportamento di $(u(t), v(t))$ nel *piano delle fasi* e un possibile grafico di $u(t)$ e di $v(t)$. Le soluzioni sono periodiche e ruotano attorno al punto di equilibrio, in senso antiorario.



Questo semplice modello, formulato intorno al 1920, può essere reso più realistico usando le idee introdotte nello studio di una singola popolazione. Ad esempio, la crescita alla Malthus delle prede potrebbe essere sostituita con una crescita alla Verhulst, o con funzioni di crescita più sofisticate. Potrebbero essere introdotti anche un ritardo, costante o di tipo integrale, e perturbazioni stagionali. Lo stesso vale per i predatori, naturalmente. Questi modelli sono in fase di studio e alimentano molta ricerca attuale. Si possono trovare soluzioni periodiche, o quasi periodiche, studiarne la stabilità al variare dei parametri e delle condizioni iniziali. In alcuni casi si è persino evidenziato il fenomeno del *caos*, parola usata in situazioni di estrema instabilità, per cui piccolissime variazioni iniziali possono portare a un evolversi delle soluzioni del tutto imprevedibile.

Risulta molto importante, in questo contesto, il problema della *persistenza* di tutte le specie. Le oscillazioni osservate potrebbero infatti portare, nella realtà, all'estinzione delle prede o dei predatori.

2. Due specie in competizione

Supponiamo di avere due specie che competono per la sopravvivenza (ad esempio, hanno le stesse risorse di nutrimento, che sono limitate). Possiamo assumere che, in assenza dell'altra specie, ciascuna abbia una crescita di tipo logistico. Un modello plausibile è il seguente:

$$\begin{cases} x' = \alpha_1 x \left(1 - \frac{x + b_{12}y}{K_1}\right), \\ y' = \alpha_2 y \left(1 - \frac{y + b_{21}x}{K_2}\right). \end{cases}$$

Anche qui le costanti $\alpha_1, \alpha_2, K_1, K_2, b_{12}, b_{21}$ sono tutte positive. In particolare, b_{12} misura l'effetto della specie v sulla crescita di u , mentre b_{21} misura l'effetto di u sulla crescita di v . A seconda dei parametri

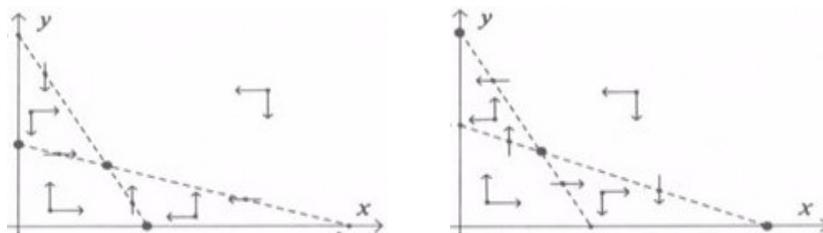
$$a_{12} = b_{12} \frac{K_2}{K_1}, \quad a_{21} = b_{21} \frac{K_1}{K_2},$$

possono verificarsi essenzialmente quattro situazioni diverse.

I caso: $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$. Qui c'è un equilibrio stabile nel primo quadrante del piano delle fasi: le due specie possono coesistere.

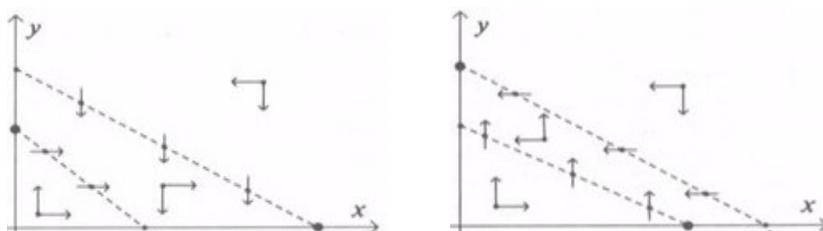
II caso: $a_{12} > 1$ e $a_{21} > 1$. Anche qui c'è un equilibrio, ma è instabile. A seconda delle condizioni iniziali, una delle due specie si estinguerà.

Nelle figure che seguono sono evidenziate le *null clines*, ossia le linee in cui le componenti del campo vettoriale si annullano.



III caso: $a_{12} < 1$ e $a_{21} > 1$. Non ci sono equilibri nel primo quadrante, la specie v si estingue, mentre la u si stabilizza verso la sua capacità portante K_1 .

IV caso: $a_{12} > 1$ e $a_{21} < 1$. Anche qui non ci sono equilibri nel primo quadrante, la specie u si estingue, mentre la v si stabilizza verso la sua capacità portante K_2 .



7.4 Diffusione di epidemie

Nel 1927 Kermack e McKendrick introdussero il cosiddetto modello SIR con lo scopo di studiare l'epidemia di peste presentatasi a Bombay nel 1905-1906. Esso prende il nome dai compartimenti i cui si suddivide la popolazione: suscettibili, infetti e rimossi. Essi fecero le seguenti ipotesi:

- tutti gli individui suscettibili sono infettabili nello stesso modo;
- le persone infette sono tutte ugualmente contagiose;
- una volta rimosse esse risultano immuni alla malattia.

Consideriamo malattie per le quali il contagio possa avvenire solo tramite contatto diretto tra due persone (una infetta e una suscettibile) e supponiamo che l'essere infetto non modifichi le abitudini del soggetto (non diminuiranno, quindi, i contatti con altre persone). Studieremo inoltre un'epidemia che si sviluppi in un periodo di tempo relativamente breve, per trascurare il numero di nascite o morti naturali.

Denotando con $S(t)$ il numero di suscettibili al tempo t , con $I(t)$ il numero degli infetti e con $R(t)$ il numero dei rimossi (che comprende sia i guariti che

i morti), il modello proposto è il seguente:

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha S(t)I(t) \\ I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ R'(t) = \beta I(t). \end{cases}$$

Studiando le soluzioni di questo sistema si può osservare che, partendo da un numero basso di infetti, la malattia solitamente si sviluppa fino a che il numero di infetti raggiunge un massimo, per poi tendere a zero. Nel frattempo, molti suscettibili si ammalano, ma la cosa sorprendente è che un certo numero di essi non verrà mai contagiato, rimanendo quindi sempre sano. Questo fatto si può osservare dalla figura seguente, dove vengono rappresentate la curve $(S(t), I(t))$ con diversi valori iniziali. Le orbite vengono percorse da destra a sinistra e, dopo aver raggiunto il loro massimo, tendono ad avvicinarsi all'asse orizzontale, in un punto che rappresenta la fine dell'epidemia.

