ESERCIZI SU GEOMETRIA DELLO SPAZIO
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2024/25

Esercizio 1

Dati i seguenti punti Q e le seguenti equazioni cartesiane di piani π in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, **determina** un'equazione cartesiana del piano passante per Q e parallelo a π:

(i) $Q = (1, 1, 0)$ e $\pi\colon 3x - 2y + z = 1$;
(ii) $Q = (-1, 0, 2)$ e $\pi\colon x + 4y + 2z = -2$;
(iii) $Q = (0, 0, 0)$ e $\pi\colon 2x - 7y + 3x = 0$.

Esercizio 2

Due rette r ed s di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si dicono *complanari* se esiste un piano π di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ che le contiene entrambe, ovvero se $r \subseteq \pi$ e $s \subseteq \pi$.

In ciascuno dei seguenti casi, **determina** se le rette r ed s siano o meno complanari.

(i)
$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 8 - t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = 1 - \tau \\ y = 3 + \tau \\ z = 5\tau \end{cases}$$

(ii)
$$r\colon \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = \tau \\ y = \tau \\ z = \tau \end{cases}$$

(iii)
$$r\colon \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 - 2t \\ z = 8 - t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = \tau \\ y = -5 + \tau \\ z = 2 + \tau \end{cases}$$

Esercizio 3

Determina un'equazione cartesiana del piano in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ contenente la retta di equazioni cartesiane
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y + 3z = 4 \end{cases}$$
e parallelo alla retta di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Esercizio 4

Per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$, **determina** equazioni parametriche e cartesiane della retta $r_a \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per i punti $P = (1,1,1)$ e $Q = (2,0,a)$.

Determina poi il valore di a tale per cui la retta r_a è parallela al piano π di equazione cartesiana $2x - y + 3z = 1$.

Esercizio 5

Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo, in dipendenza dal parametro $a \in \mathbb{R}$, i tre punti

$$P = (0,-1,1)\,, \quad Q = (0,1,,1)\,, \quad R_a = (a,0,0)\,.$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, **determina** il piano $\pi_a \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per P, Q e R_a.

A questo punto, **decidi** se esistano valori di a tali per cui il piano π_a sia parallelo alla retta $r \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di equazioni cartesiane

$$r\colon \begin{cases} y = 3 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 6

Nello spazio $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, consideriamo in dipendenza del parametro $a \in \mathbb{R}$ le rette

$$r\colon \begin{cases} x + 2y = a \\ z = 0 \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Decidi se esistano valori di a tale per cui r ed s sono complanari. In tal caso, **decidi** se per tali valori le rette siano incidenti o meno.

Esercizio 7

Nello spazio $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, consideriamo i punti

$$P = (1,1,0) \quad \text{e} \quad P' = (1,2,3)$$

e in $\mathbb{R}^3$ consideriamo i vettori

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sia $r \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ la retta passante per P e con giacitura $\operatorname{span}(v)$ e sia $r' \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ la retta passante per P' e con giacitura $\operatorname{span}(v')$.

Dimostra che r ed r' sono sghembe.

Determina due piani paralleli π e π' tali che $r \subseteq \pi$ ed $r' \subseteq \pi'$.