Tutorato Analisi Matematica 1 - 2024/2025

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 13 - Calcolo di integrali - 17/12/2024

Richiamo

- $f : I \to \mathbb{R}$ è primitivabile se esiste $F : I \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $F'(x) = f(x)$

  $\hookrightarrow$ F: primitiva di f

Se f è primitivabile è anche integrabile (e ammette infinite primitive definite a meno di una costante)

Si indica $F(x) = \int f(x)\,dx$, e nel caso di integrale definito si ha $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

- Per trovare una primitiva di f dobbiamo farne l'"antiderivata": le regole del calcolo integrale seguono dalle regole delle derivate:

- $\frac{d}{dx}\left(F(x)\right) = f(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) + c = \int f(x)\,dx \quad , \quad F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

- $\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \Rightarrow \quad f(g(x)) + c = \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$

$$f(g(b)) - f(g(a)) = \int_a^b f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

- $\frac{d}{dx}\left(f(x)\,g(x)\right) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

$$\Rightarrow f(x)\,g(x) + c = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

"Scarico" la derivata da una funzione all'altra cambiando segno

$$\Rightarrow \int f'(x)\,g(x)\,dx = -\int f(x)\,g'(x)\,dx + f(x)\,g(x) + c$$

(per parti)

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx + f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)$$

• Spesso è utile la primitivazione / integrazione per sostituzione:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \overset{\uparrow}{=} \left[\int f(t)\,dt\right]\Bigg|_{t=g(x)}$$

L> alla fine devo tornare alla variabile x

$$\boxed{\begin{aligned} t &= g(x) \\ dt &= g'(x)\,dx \end{aligned}}$$

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

-> utile se riconosco di avere una funzione integranda di quella forma!

• In generale una sostituzione del tipo

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(g^{-1}(t)) \left[\frac{1}{g'(x)}\right]\Bigg|_{x=g^{-1}(t)} dt\right]\Bigg|_{t=g(x)}$$

$$t = g(x) \rightarrow x = g^{-1}(t)$$

$$dt = g'(x)\,dx \rightarrow dx = \left[\frac{1}{g'(x)}\right]\Bigg|_{x=g^{-1}(t)} dt$$

oppure

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt\right]\Bigg|_{t=g^{-1}(t)}$$

$$x = g(t)$$

$$dx = g'(t)\,dt$$

può essere fatta solo se g è invertibile!

L> se l'integrale è $\int_a^b$, l'invertibilità è richiesta nell'intervallo necessario

Esercizi

Es. 1 (immediati o sostituzioni semplici)

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3\cos x} \operatorname{sen} x \, dx$ ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3e^{\arctan x}}{1+x^2} \, dx$ iii) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1} \, dx$ iv) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \, dx$

Es. 2 (sfruttare la simmetria)

i) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} x \, |\tan x| \, dx$ ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{senh}(\tan x^5) \, dx$ iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos(2x) \, dx$ iv) $\displaystyle\int_0^6 [\operatorname{sen}(x-3)]^7 \, dx$

Es. 3 (per parti e con valore assoluto)

i) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x \, dx$ ii) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x \, dx$ iii) $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx$

iv) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3 |1-x| \, dx$ v) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x \, |1-e^{2x}| \, dx$ vi) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\tan x| \, dx$

Es. 4 (qualche razionale semplice) → guardare esercizi svolti su integrali su Moodle per molti altri!

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-x^2} \, dx$ ii) $\displaystyle\int \frac{1}{4+x^2} \, dx$ iii) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x+1} \, dx$

Es. 5 (l'Hopital)

i) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{x-1} \, dt$ ii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2} \, dt}{\sqrt{x} \, e^x}$ iii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}(x^2)} \int_{4x^2}^{9x^2} (1+\cos(\sqrt{t})) \, dt$

Es. 6

i) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$ ii) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{e^x-1} \, dx$ iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x \operatorname{sen}(\cos x) \operatorname{sen} x \, dx$ iv) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cosh(\operatorname{sen} x) \cos x \sqrt{\operatorname{sen} x} \, dx$

SVOLGIMENTI

Es.1

i) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3\cos x} \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3\cos x} \overbrace{(-3\operatorname{sen} x)}^{\text{derivata di } 3\cos x} dx = -\frac{1}{3}\left[e^{3\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(e^{3\cos\frac{\pi}{4}} - e^{3\cos 0}\right) = -\frac{1}{3}\left(e^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} - e^{3}\right)$$

- Oppure con sostituzione:

$$t = 3\cos x \to dt = -3\operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{3}dt$$

Gli estremi diventano: $x = 0 \to t = 3\cos 0 = 3$, $x = \frac{\pi}{4} \to t = 3\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3\cos x} \operatorname{sen} x \, dx = \int_3^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} e^{t}\left(-\frac{1}{3}dt\right) = -\frac{1}{3}\int_3^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} e^{t} dt = -\frac{1}{3}\left[e^{t}\right]_3^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{3}\left(e^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} - e^{3}\right)$$

- Oppure con sostituzione

$$t = e^{3\cos x} \to dt = e^{3\cos x}(-3\operatorname{sen} x)\,dx, \quad x = 0 \to t = e^{3}, \quad x = \frac{\pi}{4} \to t = e^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

$\hookrightarrow e^{3\cos x} \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{3}dt$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3\cos x} \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{3}\int_{e^3}^{e^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}} dt = -\frac{1}{3}\left(e^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} - e^{3}\right)$$

ii) $$\int_0^1 \frac{3e^{\arctan x}}{1+x^2} dx = 3\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} e^{\arctan x} dx = 3\left[e^{\arctan x}\right]_0^1$$

$$= 3\left(e^{\arctan 1} - e^{\arctan 0}\right) = 3\left(e^{\frac{\pi}{4}} - 1\right)$$

(oppure con sostituzione $t = \arctan x$, $dt = \frac{dx}{1+x^2}$)

(oppure $t = e^{\arctan x}$, $dt = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx$)

iii) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \boxed{\frac{2x}{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\left[\log|x^2+1| + c\right] = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \boxed{\frac{c}{2}}$

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \log|f(x)|$

$\frac{c}{2}$ o c sono sempre costanti, quindi spesso la si indica sempre con c anche se sono 2 costanti diverse...

(oppure con $t = x^2+1$, $dt = 2x\,dx$)

iv) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx = \int x\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}\,dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c\right] =$

$t = 1-x^2$

$dt = -2x\,dx \to x\,dx = -\frac{1}{2}t$

$\displaystyle = t^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{t}} + c = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c$ → se l'integrale è indefinito, dobbiamo tornare alla variabile iniziale!

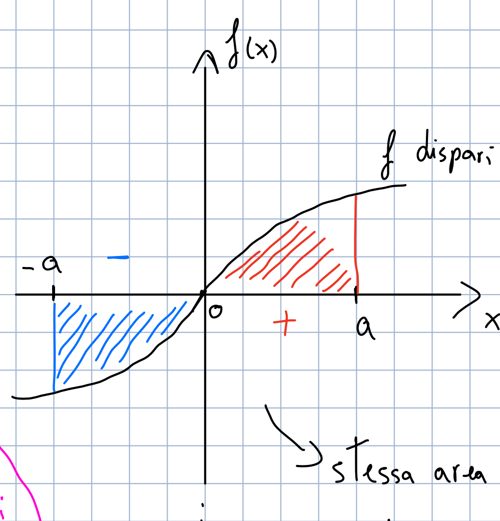
(o immediato: → $\displaystyle -\frac{1}{2}\int -2x\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \Big/ -\frac{1}{2}\right] = (1-x^2)^{-1/2}$

Es. 2

i) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} x\,|\mathrm{Tan}\,x|\,dx$ → la funzione integranda è dispari infatti:

$f(x) = x\,|\mathrm{Tan}\,x|$, $f(-x) = -x\,|\mathrm{Tan}(-x)| = -x\,|-\mathrm{Tan}\,x| = -x\,|\mathrm{Tan}\,x|$
$= -f(x)$

Inoltre l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto 0, dunque l'integrale è nullo.



↳ stessa area ma con segno opposto ⇒ si annullano

$\left[\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\,dx} + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\right.$ variabile di int. muta

↳ $t = -x \Rightarrow \displaystyle = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$

$\displaystyle = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$ → 0 se f dispari
→ $\left.\displaystyle 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\right]$ se f pari

ii) e iii) $\rightarrow$ integrali nulli come per il punto i)

$$\text{iv)} \int_0^6 \left[\operatorname{sen}(x-3)\right]^7 dx \underset{\uparrow}{=} \int_{-3}^{3} \left[\operatorname{sen} t\right]^7 dt = 0$$

$t = x-3 \rightarrow$
$dt = dx$
$x = 0 \rightarrow t = -3$
$x = 6 \rightarrow t = 3$

$f(t) = (\operatorname{sen} t)^7$ dispari e intervallo simm.

Es. 3

$$\text{i)} \int_0^\pi x^2 \operatorname{sen} x \, dx = \int_0^\pi x^2 \frac{d}{dx}(-\cos x)\, dx = -\int_0^\pi \frac{d}{dx}(x^2) \cdot (-\cos x)\, dx + \left[x^2 \cdot (-\cos x)\right]_0^\pi$$

formula per parti: scarichiamo la derivata da una funzione all'altra cambiando segno (+ un pezzo da non integrare)

ancora per parti

$$= \left[-x^2 \cos x\right]_0^\pi + 2\int_0^\pi x \cos x \, dx = \left(-\pi^2 \cos\pi + 0\right) + 2\int_0^\pi x \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)\, dx =$$

$$= \pi^2 + 2\left[-\int_0^\pi \frac{d}{dx}(x) \operatorname{sen} x \, dx + \left[x \operatorname{sen} x\right]_0^\pi\right]$$

$$= \pi^2 - 2\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx = \pi^2 + 2\left[\cos x\right]_0^\pi = \underline{\pi^2 - 4}$$

$$\text{ii)} \int_1^2 x^2 \log x \, dx = \int_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) \cdot \log x \, dx = -\int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{d}{dx}(\log x)\, dx + \left[\frac{x^3}{3} \log x\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{3}\int_1^2 x^2 dx + \frac{8}{3}\log 2 = -\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \frac{8}{3}\log 2 = -\frac{1}{9}(8-1) + \frac{8}{3}\log 2$$

$$= \underline{-\frac{7}{9} + \frac{8}{3}\log 2}$$

iii) $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx = \int \frac{d}{dx}(e^x) \cos x \, dx = -\int e^x \frac{d}{dx}(\cos x)\, dx + e^x \cos x + c$

$\displaystyle = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx + c = e^x \cos x + \int \frac{d}{dx}(e^x) \operatorname{sen} x \, dx + c$

$\displaystyle = e^x \cos x - \int e^x \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)\, dx + e^x \operatorname{sen} x + c = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) - \int e^x \cos x \, dx + c$

Ciò scritto può essere visto come una semplice equazione dove l'incognita è $\int e^x \cos x \, dx$:

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + c - \int e^x \cos x \, dx$$

Definisco $F(x) = \int e^x \cos x \, dx$

$$\Rightarrow F(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + c - F(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\left(e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + c\right) \Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + c$$

iv) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3 |1-x| \, dx$

$$|1-x| = \begin{cases} 1 - x & \text{per } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{2} x^3|1-x|\, dx = \int_{-2}^{1} x^3(1-x)\, dx + \int_{1}^{2} x^3(x-1)\, dx = \int_{-2}^{1}(x^3 - x^4)\, dx - \int_{1}^{2}(x^3-x^4)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_{1}^{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \left(\frac{2^4}{4} + \frac{2^5}{5}\right) - \left[\frac{2^4}{4} - \frac{2^5}{5} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - 4 - \cancel{\frac{2^5}{5}} - 4 + \cancel{\frac{2^5}{5}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} - 8 = \frac{5-4-80}{10} = -\frac{79}{10}$$

v) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,|1-e^{2x}|\,dx$

$e^{2x} \leq 1 \rightarrow x \leq 0$

$$|1-e^{2x}| = \begin{cases} 1-e^{2x} & \text{se } 1-e^{2x} \geq 0 \\ e^{2x}-1 & \text{se } 1-e^{2x} < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-e^{2x} & \text{se } x \leq 0 \\ e^{2x}-1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{2} x\,|1-e^{2x}|\,dx = \int_{-1}^{0} x\,(1-e^{2x})\,dx + \int_{0}^{2} x\,(e^{2x}-1)\,dx = \int_{-1}^{0} x\,(1-e^{2x})\,dx - \int_{0}^{2} x\,(1-e^{2x})\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} x\,dx - \int_{-1}^{0} x\,e^{2x}\,dx - \int_{0}^{2} x\,dx + \int_{0}^{2} x\,e^{2x}\,dx$$

Calcoliamo per parti:

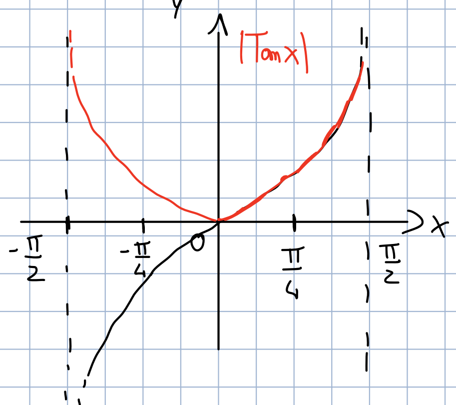
$$\int x\,e^{2x}\,dx = \int x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)dx = -\int \frac{d}{dx}(x)\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx + \frac{x}{2}e^{2x}$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx + \frac{x}{2}e^{2x} = -\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{x}{2}e^{2x} + c = \frac{e^{2x}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) + c$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} x\,|1-e^{2x}|\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} + \left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]_{0}^{2}$$

$$= -\cancel{\frac{1}{2}} - \left(-\cancel{\frac{1}{4}} + \frac{3}{4}e^{-2}\right) - 2 + \frac{3}{4}e^{4} + \cancel{\frac{1}{4}} = \underline{-2 + \frac{3}{4}\left(e^{4} - e^{-2}\right)}$$

vi) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\tan x|\,dx$



$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} |\tan x|\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$$

per simmetria ($|\tan x|$ è pari)

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -2\left[\log|\cos x|\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -2\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2} - \log 1\right) = -2\log\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\log 2}$$

proprietà log

Es. 4 (qualche razionale semplice)

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-x^2}\,dx$

Decomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1}{x^3-x^2}=\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}=\frac{(A+C)x^2+(-A+B)x-B}{x^2(x-1)}$$

$\Rightarrow$ uguagliando i termini abbiamo $\begin{cases} B=-1 \\ A=B=-1 \\ C=-A=1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{x^3-x^2}=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x-1}$

da cui

$$\int\frac{1}{x^3-x^2}\,dx=-\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{1}{x^2}\,dx+\int\frac{1}{x-1}\,dx=\underline{-\log|x|+\frac{1}{x}+\log|x-1|+c}$$

ii) $$\int\frac{1}{4+x^2}\,dx=\int\frac{1}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx \underset{\uparrow}{=}$$

$t=\frac{x}{2}$, $dt=\frac{dx}{2}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\arctan t+c=\underline{\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c}$$

iii) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x+1}\,dx$ $\longrightarrow$ qua il grado del polinomio al num. è $\geq$ di quello al denom., quindi effettuiamo la <u>divisione</u>, ovvero:

$$\frac{x^2+1}{x+1}=Ax+B+\frac{C}{x+1}=\frac{Ax^2+Ax+Bx+B+C}{x+1}=\frac{Ax^2+(A+B)x+B+C}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x+1}=x-1+\frac{2}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx = \int \left(x - 1 + \frac{2}{x+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - x + 2\log|x+1| + c$$

Es. 5 (l' Hopital)

i) $$\lim_{x \to 1} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{x-1}\,dt = \lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x e^{t^2}\,dt}{x-1} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

In generale abbiamo:

$$F(x) = \int f(x)\,dx \quad \text{che soddisfa} \quad F'(x) = f(x)$$

e anche

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dunque detta F una primitiva di $e^{t^2} \to F(t) = \int e^{t^2}\,dt$, $F'(t) = e^{t^2}$

possiamo scrivere l' integrale definito

$$\int_1^x e^{t^2}\,dt = F(x) - F(1) \Rightarrow \frac{d}{dx}\int_1^x e^{t^2}\,dt = \frac{d}{dx}\big(F(x) - F(1)\big) = F'(x) = e^{x^2}$$

Dunque applichiamo l' Hopital per risolvere il limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x e^{t^2}\,dt}{x-1} \overset{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx}\int_1^x e^{t^2}\,dt}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{e^{x^2}}{1} = e$$

ii) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt}{\sqrt{x}\; e^{x}}$$

derivata composta!

$$F(t) = \int e^{t^2}\,dt \Rightarrow \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt = F(\sqrt{x}) - F(0) \Rightarrow \frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt = \frac{d}{dx}\left(F(\sqrt{x})\right) = F'(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$F'(t) = e^{t^2}$

$$= e^{(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt}{\sqrt{x}\; e^{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{x}}{2\sqrt{x}}}{\frac{e^{x}}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,e^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{x}}{\cancel{2\sqrt{x}}}}{\frac{e^{x}+2xe^{x}}{\cancel{2\sqrt{x}}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^{x}}}{x\cancel{e^{x}}\left(2+\frac{1}{x}\right)} = \underline{0}$$

iii) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}(x^2)} \int_{4x^2}^{9x^2} \left(1+\cos(\sqrt{t})\right) dt$$

$$F(t) = \int (1+\cos\sqrt{t})\,dt$$

$$F'(t) = 1+\cos\sqrt{t}$$

$$\Rightarrow \int_{4x^2}^{9x^2} \left(1+\cos(\sqrt{t})\right) = F(9x^2) - F(4x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\int_{4x^2}^{9x^2} (1+\cos\sqrt{t})\,dt = F'(9x^2)\cdot 18x - F'(4x^2)\cdot 8x$$

$$= \left(1+\cos\left(\sqrt{9x^2}\right)\right)\cdot 18x - \left(1+\cos\left(\sqrt{4x^2}\right)\right)\cdot 8x$$

$$= 2x\left[9\left(1+\cos(3|x|)\right) - 4\left(1+\cos(2|x|)\right)\right]$$

$$= 2x\left[5 + 9\cos(3|x|) - 4\cos(2|x|)\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\text{sen}(x^2)} \int_{4x^2}^{9x^2} (1+\cos(\sqrt{t}))\,dt \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x}\left[5+9\cos(3|x|)-4\cos(2|x|)\right]}{\cancel{2x}\cos(x^2)} = \underline{10}$$

Es. 6

i) $\int \text{sen}^2 x\,dx$ $\longrightarrow$ un metodo veloce per calcolarlo è sfruttare la formula di bisezione:

$\nearrow$ si può fare anche parti

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \Rightarrow \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2} \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\Rightarrow \int \text{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right)dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4} + c$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{4} + c = \frac{1}{2}\left(x - \text{sen}\,x\cos x\right) + c$$

ii) $\int_0^1 \sqrt{e^x-1}\,dx$

Poniamo $t = \sqrt{e^x-1}$, $dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx = \frac{t^2+1}{2t}dx \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2+1}dt$

$\downarrow$

$t^2+1 = e^x$

Gli estremi diventano: $x=0 \to t = \sqrt{e^0-1} = 0$

$x = 1 \to t = \sqrt{e^1-1} = \sqrt{e-1}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{e^x-1}\,dx = \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{e-1}}\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$= 2\Big[t - \arctan(t)\Big]_0^{\sqrt{e-1}} = 2\left(\sqrt{e-1} - \arctan\sqrt{e-1} - 0 + \arctan 0\right) = 2\left(\sqrt{e-1} - \arctan\sqrt{e-1}\right)$$

iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x \ \operatorname{sen}(\cos x) \operatorname{sen} x \, dx$

Proviamo con $t = \cos x \to dt = -\operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow \operatorname{sen} x \, dx = -dt$

$x = 0 \to t = \cos 0 = 1 \quad ; \quad x = \pi \to t = \cos \pi = -1$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \ \operatorname{sen}(\cos x) \operatorname{sen} x \, dx = -\int_{-1}^{1} t^2 \operatorname{sen} t \, dt = 0$$

$\hookrightarrow f(t) = t^2 \operatorname{sen} t$ dispari e intervallo simmetrico!

oppure per parti impiegando qualche minuto in più...

N.B.1 La sostituzione $t = \cos x$ può essere effettuata perché $\cos x$ è invertibile nell'intervallo di integrazione $[0, \pi]$. Se l'intervallo fosse stato $[0, 2\pi]$ la sostituzione non poteva essere fatta! (si veda prox. esercizio)

N.B. 2 Si può vedere che l'integrale è nullo subito per simmetria sfruttando le relazioni tra seno e coseno:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen} \alpha$$

Pongo $t = x - \frac{\pi}{2}$, $dt = dx$, $x = \pi \to t = \frac{\pi}{2}$, $x = 0 \to t = -\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \ \operatorname{sen}(\cos x) \operatorname{sen} x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t \ \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t) \cos t \, dt = 0$$

per simmetria (integranda dispari)

iv) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cosh(\operatorname{sen} x)\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$

• **Metodo 1**

Come nell'es. precedente possiamo porre $t = x - \frac{\pi}{2}$

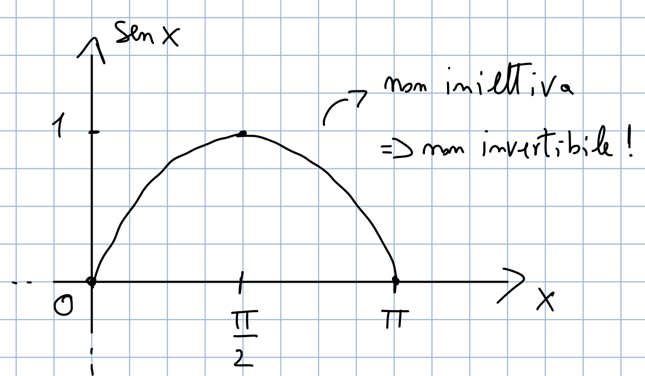
$$\int_0^{\pi} \cosh(\operatorname{sen} x)\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cosh\left(\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}\,dt$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cosh(\cos t)\operatorname{sen} t\sqrt{\cos t}\,dt = 0$$ per simmetria (integranda dispari)

• **Metodo 2** (più lungo, solo se non ci accorgiamo della simmetria...)

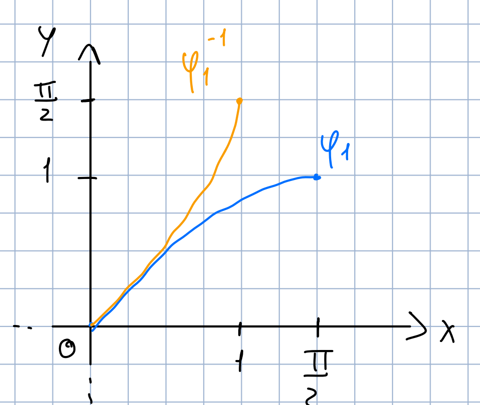
Sarebbe naturale porre $t = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, ma la funzione $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$ non è invertibile in $[0,\pi]$. Sono però invertibili le funzioni

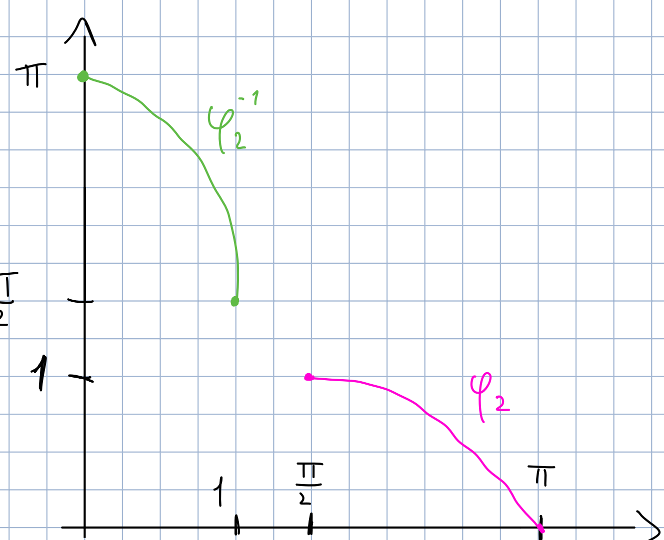
$$\begin{cases} \varphi_1 : \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to [0,1], & \varphi_1(x) = \operatorname{sen} x \\ \varphi_2 : \left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \to [0,1], & \varphi_2(x) = \operatorname{sen} x \end{cases}$$



con inverse

$$\begin{cases} \varphi_1^{-1} : [0,1] \to \left[0,\frac{\pi}{2}\right], & \varphi_1^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x \\ \varphi_2^{-1} : [0,1] \to \left[\frac{\pi}{2},\pi\right], & \varphi_2^{-1}(x) = -\operatorname{arcsen} x + \pi \end{cases}$$





Perché $\varphi_2^{-1}(x) = -\arcsen(x) + \pi$? È la funzione che otteniamo invertendo $\operatorname{sen} x$ ristretta all'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ invece che ristretta all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\hookrightarrow$ verificare graficamente ribaltando $\operatorname{sen} x$ rispetto la bisettrice $y = x$!

Per calcolare l'integrale serve solo riconoscere che dobbiamo spezzarlo in 2 sottointervalli, senza scrivere / riconoscere $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$ ... $\to$ in questo caso! In generale serve...

$\downarrow$

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx \qquad \text{con } f(x) = \cosh(\operatorname{sen} x)\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}$$

Pongo $t = \sqrt{\varphi_1(x)} = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, $dt = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx \Rightarrow \cos x\,dx = 2t\,dt$ $\to$ in questo caso non serve invertire esplicitamente x in funzione di t

$x = 0 \to t = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \to t = 1$, $x = \pi \to t = 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \cosh(\operatorname{sen} x)\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx = \int_0^1 \cosh(t^2)\cdot 2t^2\,dt + \int_1^0 \cosh(t^2)\cdot 2t^2\,dt$$

$$= \int_0^1 \cosh(t^2)\,2t^2\,dt - \int_0^1 \cosh(t^2)\cdot 2t^2\,dt = 0$$

N.B.

In questo esercizio sembra non capirsi il motivo per cui abbiamo dovuto spezzare in 2 integrali, perché non è stato necessario esplicitare x in funzione di t.

Provare a risolvere

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx \qquad \text{con la sostituzione } t = \operatorname{sen} x \quad \left(\text{usando } \cos(\arcsen(t)) = \sqrt{1-t^2}, -1 \leq t \leq 1\right)$$

per capirne meglio il motivo.