

Sottospazio affine generato da un sottoinsieme

$$P_0, \dots, P_k \in \mathbb{K}^n \rightsquigarrow \mathcal{L}(P_0, \dots, P_k) \stackrel{\text{def}}{=} P_0 + \text{span}(P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0)$$

$$P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0 \in \mathbb{K}^n \text{ lin. indep.} \Leftrightarrow \dim \mathcal{L}(P_0, \dots, P_k) = k.$$

Equazione vettoriale di $\mathcal{L}(P_0, \dots, P_k)$

$$\mathcal{L}(P_0, \dots, P_k): X = t_1(P_1 - P_0) + \dots + t_k(P_k - P_0) + P_0$$

Oss. $\mathcal{L}(P_0, \dots, P_k)$ non dipende dall'ordine dei punti $P_0, \dots, P_k$.

$$P_i \in \mathcal{L}(P_0, \dots, P_k), \forall i = 0, \dots, k. \text{ Infatti } P_i = P_0 + (P_i - P_0).$$

Retta per due punti distinti. $P_0 \neq P_1 \in \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \dim \mathcal{L}(P_0, P_1) = 1$

$$\mathcal{L}(P_0, P_1) = P_0 + \text{span}(P_1 - P_0)$$

$$\mathcal{L}(P_0, P_1): X = t(P_1 - P_0) + P_0$$

Oss. $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{K}^n$ allineati $\Leftrightarrow P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0 \in \mathbb{K}^n$ proporzionali.

Piano per tre punti non allineati. $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{K}^n$ non allineati $\Leftrightarrow$

$$P_1 - P_0, P_2 - P_0 \text{ lin. indep.} \Leftrightarrow \dim(\mathcal{L}(P_0, P_1, P_2)) = 2$$

$$\mathcal{L}(P_0, P_1, P_2): X = t_1(P_1 - P_0) + t_2(P_2 - P_0) + P_0$$

Isometrie

V spazio vettoriale Euclideo.

Def. $f: V \rightarrow V$ isometria se $d(f(u), f(v)) = d(u, v), \forall u, v \in V$.

Le isometrie di $\mathbb{R}^n$ sono affinità del tipo

$$f(X) = AX + B$$

con $A \in O(n)$ e $B \in \mathbb{R}^n$. f è detta *isometria diretta* se $A \in SO(n)$.

Verifichiamo che f è isometria:

$$\begin{aligned} d(f(X), f(Y)) &= \|(AX + B) - (AY + B)\| = \|A(X - Y)\| = \\ &= \sqrt{{}^t(A(X - Y))A(X - Y)} = \sqrt{{}^t(X - Y){}^tAA(X - Y)} = \\ &= \|X - Y\| = d(X, Y). \end{aligned}$$

Se $A = I_n$, $f(X) = X + B$ traslazione $\Rightarrow$ isometria diretta.

Oss.

1) $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ isometria;

2) $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ isometrie $\Rightarrow f \circ g$ isometria;

3) f isometria $\Rightarrow f^{-1}$ isometria.

4) isometrie preservano angoli tra rette.

Rotazioni del piano. Matrice di rotazione di angolo $\theta \in \mathbb{R}$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \text{SO}(2)$$

Oss. Si verificano facilmente le seguenti relazioni.

$$R_0 = R_{2k\pi} = I_2, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi} \text{ (usando formule di addizione per sin e cos).}$$

$$R_\theta^{-1} = R_{-\theta} \text{ (usando le due precedenti).}$$

$$\det R_\theta = 1.$$

Def. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(X) = R_\theta X + B$ è detta *rototraslazione*.

Se $\theta \neq 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists! Q \in \mathbb{R}^2$ t.c. $f(Q) = Q$ (*punto fisso*), soluzione del sistema lineare

$$R_\theta X + B = X \Leftrightarrow (R_\theta - I_2)X = -B.$$

Ossia una rototraslazione di angolo non nullo è una rotazione attorno a Q (*centro di rotazione*). Infatti se $\theta \neq 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\det(R_\theta - I_2) = 2(1 - \cos \theta) \neq 0$$

$$Q = -(R_\theta - I_2)^{-1}B.$$

Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Dati due vettori

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

definiamo il *prodotto vettore* o *prodotto vettoriale* come il determinante

$$X \times Y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

È un determinante formale con la base canonica in prima riga. Si ha:

$$\begin{aligned} X \times Y &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3 = \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3. \end{aligned}$$

Si può dimostrare l'identità seguente, sviluppando i calcoli a primo e secondo membro:

$$\|X \times Y\|^2 = \|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2$$

$$\|X \times Y\| = \|X\| \|Y\| \sin \widehat{XY}$$

$X \times Y = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow X$ e Y proporzionali.

X, Y linearmente indipendenti $\Rightarrow X \times Y \in \text{span}(X, Y)^\perp$.

Il verso si ricava con la "regola della mano destra": pollice verso X , indice verso Y e medio verso $X \times Y$ (come per i vettori della base canonica).