

ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA
A.A. 2024/2025
SIMULAZIONE PROVA SCRITTA 17/12/24

- (1) Si dimostri che se C è una curva affine irriducibile di $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ di grado $d \geq 2$, allora C ha al più d asintoti distinti.
Si esibisca una equazione di una cubica affine complessa con esattamente 3 asintoti.

- (2) Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) F di equazione

$$x_0x_1^5 - x_0x_1^3x_2^2 - x_2^6 = 0.$$

- (a) Determinarne i punti singolari, la loro molteplicità su F e le rette tangenti nei punti singolari;
(b) si determini una parametrizzazione razionale della curva (suggerimento: si consideri un opportuno fascio di rette).
- (3) Si considerino i punti $A = (1 : 0 : -1)$, $B = (0 : 1 : 0)$, $C = (1 : 0 : 0)$ e $D = (0 : 1 : 1)$ di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Si considerino le seguenti rette:

- r di equazione $x_0 + x_2 = 0$,
- s di equazione $x_1 = 0$,
- t di equazione $2x_1 - 2x_2 - x_0 = 0$.

Sia W l'insieme delle quartiche piane proiettive Q che verificano le seguenti condizioni:

- (i) A è un punto singolare;
- (ii) $I_B(Q, r) \geq 3$;
- (iii) C è un punto singolare e $I_C(Q, s) \geq 3$;
- (iv) la retta t è tangente a Q nel punto D .

Si dica:

- (a) se W è un sistema lineare di curve e, in caso affermativo, se ne determini la dimensione;
- (b) se esiste in W una quartica avente B come punto triplo.