Convergenza di Successioni di Variabili Aleatorie

Convergenza di VA

- Definire i vari tipi di convergenza di successioni di variabili aleatorie
  - quasi certa
  - in probabilità
  - in L^p
  - in distribuzione
- Relazioni tra i vari tipi di convergenza, esempi
- Due risultati classici
  - Legge dei Grandi Numeri
  - Teorema del Limite Centrale

Convergenza di VA

- Data una successione $(X_n)_{n\geq 1}$ di va su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ e una va X
  - [Convergenza quasi certa] $X_n \to X$ q.c. se esiste $A \in \mathscr{F}$, $P(A) = 1$ tale che
$$\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \text{ per ogni } \omega \in A$$
  - [Convergenza in probabilità] $X_n \to^{\mathrm{P}} X$ se per ogni $\varepsilon > 0$
$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Convergenza di VA

- Data una successione $(X_n)_{n\geq 1}$ di va su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ e una va X
  - [Convergenza in L^p, $p \geq 1$] quando $X_n, X \in L^p$, $X_n \to^{L^p} X$ se
$$\lim_{n\to+\infty} d_p(X_n, X) = \lim_{n\to+\infty} E[|X_n - X|^p] = 0$$
  - [Convergenza in distribuzione o legge] $X_n \to^{\mathrm{d}} X$ se per ogni $x \in \mathbb{R}$ punto di continuità di F_X,
$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$
- Il limite è unico q.c. per convergenza q.c., in probabilità e in L^p; è unica in legge nel caso di convergenza in legge

Convergenza di VA

- Relazione tra vari tipi di convergenza
  - $X_n \to X$ q.c. $\Rightarrow$ $X_n \to^{\mathrm{P}} X$; l'implicazione opposta vale su una sottosuccessione
  - se per $p \geq 1$ riesce $X_n \to^{L^p} X$, allora
    1. $X_n \to^{L^q} X$ per ogni $1 \leq q \leq p$
    2. $X_n \to^{\mathrm{P}} X$
    3. $\lim_{n\to+\infty} E[|X_n|^p] = E[|X|^p]$
  - $X_n \to^{\mathrm{P}} X \Rightarrow X_n \to^{\mathrm{d}} X$; l'implicazione opposta vale se X è degenere

Convergenza di VA

- Convergenza in legge: coinvolge solo le cdf delle variabili ($\equiv$ le leggi immagine), possono essere anche definite su spazi di prob. diversi! si scrive
$$F_{X_n} \to^{\mathrm{d}} F_X$$
- le seguenti proposizioni sono equivalenti
  1. $X_n \to^{\mathrm{d}} X$
  2. per ogni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e limitata
  $$\lim_{n \to +\infty} E[g(X_n)] = E[g(X)]$$
  3. per ogni $B \in \mathscr{B}$ con $P(X \in \mathrm{Fr}(B)) = 0$
  $$\lim_{n \to +\infty} P(X_n \in B) = P(X \in B)$$

Convergenza di VA

- Convergenza in legge: coinvolge solo le cdf delle variabili ($\equiv$ le leggi immagine), possono essere anche definite su spazi di prob. diversi! si scrive

$$F_{X_n} \to^{\mathrm{d}} F_X$$

- le seguenti proposizioni sono equivalenti

1. $X_n \to^{\mathrm{d}} X$

4. per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_n}] = E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_n}]$$

5. per ogni t in un intorno degenere di 0 (indipendente da n)

$$\lim_{n \to +\infty} E[\mathrm{e}^{tX_n}] = E[\mathrm{e}^{tX_n}]$$

Convergenza di VA

- Esercizio. [Teorema di Poisson] siano $(X_n)_{n\geq 1}$ con $X_n \sim \text{Binomiale}(n, p_n)$ con $p_n \in (0,1)$ tale che

$$np_n \to \lambda \geq 0$$

allora

$$X_n \to^{\text{d}} \text{Poisson}(\lambda)$$

Convergenza di VA

- Esercizio. siano $(X_n)_{n\geq 1}$ iid con $X_n \sim U(0,1)$ e poniamo

$$M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

verificare che

  - $M_n \to 1$ q.c.
  - $M_n \to^{\mathrm{P}} 1$
  - $M_n \to^{L^2} 1$
  - $M_n \to^{\mathrm{d}} 1$

Convergenza di VA

- Per una successione $(X_n)_{n\geq 1}$ di va si pone

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n \qquad \text{somma parziale}$$
$$\frac{S_n}{n} \qquad \text{media empirica}$$

- Legge forte dei grandi numeri: se $(X_n)_{n\geq 1}$ sono iid e $X_n \in L^1$ per ogni n allora

$$\frac{S_n}{n} \to E[X_1] \text{ q.c. e in } L^1$$

inoltre se $X_n \in L^2$ per ogni n allora

$$\frac{S_n}{n} \to^{L^2} E[X_1]$$

- È sufficiente l'indipendenza a coppie delle variabili

Convergenza di VA

- Teorema del Limite Centrale (CLT). Idea: la media empirica di termini casuali "piccoli" si distribuisce normalmente

- CLT, versione "classica": $(X_n)_{n\geq 1}$ successione di va iid con $X_n \in L^2$ per ogni $n \geq 1$,

$$E[X_n] = \mu, \qquad \mathrm{VAR}[X_n] = \sigma^2$$

allora

$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to^{\mathrm{d}} N(0,1)$$

- Quindi $\frac{S_n}{n} \approx N(\mu, \sigma^2/n)$ e $S_n \approx N(n\mu, \sigma^2 n)$

Convergenza di VA

- CLT, versione "moderna": $(X_n)_{n\geq 1}$ successione di va indipendenti con $X_n \in L^2$ per ogni $n \geq 1$,

$$E[X_n] = 0 \text{ (non restrittivo)}, \qquad \mathrm{VAR}[X_n] = \sigma_n^2$$

posto $u_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ e se la condizione di Lindeberg

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_n^2} E[X_i^2; |X_i| \geq \varepsilon u_n] = 0$$

per ogni $\varepsilon > 0$, allora

$$\frac{S_n}{u_n} \to^{\mathrm{d}} N(0,1)$$

- Basta una ipotesi di indipendenza asintotica per il teorema

Processi Stocastici