Nome .... **Cognome** ....

Geometria
I appello d'esame - A. A. 2022-2023

23/1/2023

È necessario rispondere correttamente ad almeno 6 domande a risposta multipla nel relativo foglio.

Ciascuna domanda a risposta multipla giusta vale 0,5 punti.

Gli esercizi valgono al massimo 26 punti (totale 30/30). Le risposte agli esercizi vanno brevemente giustificate. Per essere ammessi all'orale è necessario ottenere almeno 15 punti.

Domande a risposta multipla

1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ -2 $\boxed{\text{D}}$ -3

2) Il seguente sistema lineare complesso dipendente dal parametro $a \in \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 1 \\ 2x + az = 0 \\ 2y - z = 2 \end{cases}$$

è compatibile per: $\boxed{\text{A}}$ $a = \pm i\sqrt{3}$ $\boxed{\text{B}}$ $a \neq \pm i\sqrt{3}$ $\boxed{\text{C}}$ ogni $a \in \mathbb{C}$

3) Il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{A}}$ Vero $\boxed{\text{B}}$ Falso $\boxed{\text{C}}$ i dati non sono sufficienti.

4) Il numero minimo di equazioni per descrivere un piano affine in $\mathbb{R}^4$ è:

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ 2 $\boxed{\text{C}}$ 3 $\boxed{\text{D}}$ 4 $\boxed{\text{E}}$ non esiste

5) Una matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale se:

$\boxed{\text{A}}$ $M = {}^tM$ $\boxed{\text{B}}$ $M = M^{-1}$ $\boxed{\text{C}}$ ${}^tM = M^{-1}$ $\boxed{\text{D}}$ $\det M = \pm 1$

6) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $AX = B$, dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathbb{R}^m$,

- $\boxed{\text{A}}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$
- $\boxed{\text{B}}$ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ se il sistema lineare è compatibile
- $\boxed{\text{C}}$ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$
- $\boxed{\text{D}}$ può essere qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$

7) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare suriettiva. Allora $\dim \ker f =$

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{D}}$ 3 $\boxed{\text{E}}$ i dati non sono sufficienti

8) Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ è diagonalizzabile se:

- $\boxed{\text{A}}$ esiste una base di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori di A
- $\boxed{\text{B}}$ è simmetrica
- $\boxed{\text{C}}$ è congruente ad una matrice simmetrica

Esercizi

1) *(10 punti)* Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

(a) *(1 punto)* Dire se l'endomorfismo L_A di $\mathbb{R}^3$ è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare canonico, giustificando la risposta.

(b) *(1 punto)* Calcolare

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(c) *(5 punti)* Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza A.

(d) *(3 punti)* Trovare una matrice diagonale D, una matrice ortogonale S e la sua inversa, tali che $S^{-1}AS = D$.

2) *(9 punti)* Si consideri il sistema dipendente dal parametro reale a

$$\begin{cases} ax + z = 0 \\ (a-1)x + y + az = a \\ y + z = a. \end{cases}$$

Determinare per quali valori di a il sistema è compatibile e risolverlo, descrivendo anche l'insieme delle soluzioni, che tipo di insieme è, e la sua dimensione.

3) *(7 punti)* Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il piano L di equazione cartesiana

$$L : x - y + 2z + 1 = 0$$

e la retta r_α, dipendente dal parametro reale α, di equazioni parametriche

$$r_\alpha : \begin{cases} x = \alpha t + 1 \\ y = \alpha \\ z = -t + 2\alpha. \end{cases}$$

Determinare i valori di α tali per cui la retta e il piano siano paralleli.