Nome .... **Cognome** ....

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Prova scritta di Geometria per Ingegneria Navale e Industriale

II appello d'esame – A. A. 2022-2023

6/2/2023

È necessario rispondere correttamente ad almeno 6 domande a risposta multipla nel relativo foglio.

Ciascuna domanda a risposta multipla giusta vale 0,5 punti.

Gli esercizi valgono al massimo 26 punti (totale 30/30). Le risposte agli esercizi vanno brevemente giustificate. Per essere ammessi all'orale servono almeno 15 punti.

Domande a risposta multipla

1) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ con $\det A = 0$. Allora:

- [A] Le colonne di A formano una base di $\mathbb{R}^n$
- [B] A è simmetrica
- [C] Le colonne di A sono linearmente dipendenti
- [D] A ha almeno una riga o una colonna nulla

2) Il seguente sistema lineare reale dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} ax + y + z = -1 \\ x + z = 0 \\ 2x + ay = 1 \end{cases}$$

è compatibile: [A] soltanto per $a = -1$ [B] $\forall a \neq 2$ [C] $\forall a \in \mathbb{R}$

3) Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

[A] Vero [B] Falso [C] i dati non sono sufficienti.

4) Il numero minimo di equazioni per descrivere una retta affine in $\mathbb{R}^4$ è:

[A] 1 [B] 2 [C] 3 [D] 4 [E] non esiste

5) Una matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e soltanto se:

$\boxed{\text{A}}$ $M = {}^tM$ $\boxed{\text{B}}$ $M = M^{-1}$ $\boxed{\text{C}}$ ${}^tM = M^{-1}$ $\boxed{\text{D}}$ $\det M \neq 0$

6) Supponiamo che $A \in M_n(\mathbb{C})$ abbia n autovalori distinti. Quale tra le seguenti è vera?

$\boxed{\text{A}}$ A è diagonalizzabile

$\boxed{\text{B}}$ A può non essere diagonalizzabile, dipende dagli autovettori

$\boxed{\text{C}}$ A è diagonalizzabile solo se gli autovalori sono reali

7) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Allora:

$\boxed{\text{A}}$ f è suriettiva

$\boxed{\text{B}}$ f è iniettiva

$\boxed{\text{C}}$ f non è iniettiva

$\boxed{\text{D}}$ $\dim \ker f = 2$

8) Consideriamo il sistema lineare $AX = 0$ con $A \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ e $\operatorname{rg} A = 2$. Allora la dimensione dello spazio delle soluzioni è:

$\boxed{\text{A}}$ 1

$\boxed{\text{B}}$ 2

$\boxed{\text{C}}$ 3

$\boxed{\text{D}}$ Non determinabile perché il sistema potrebbe essere incompatibile.

Esercizi

1) *(9 punti)* Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - y \end{pmatrix}$$

   (a) *(1 punto)* Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica.

   (b) *(2 punti)* Dimostrare che f è un isomorfismo e calcolare

$$f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   (c) *(5 punti)* Determinare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza f.

   (d) *(1 punto)* Scrivere la matrice di f rispetto alla base trovata nel punto precedente.

2) *(9 punti)* Si consideri il sistema reale dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + (2-k)x_4 = 1 \\ (k+1)x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ (k+2)x_3 + kx_4 = -2 \end{cases}$$

Determinare per quali valori di k il sistema è compatibile e risolverlo, descrivendo anche l'insieme delle soluzioni, che tipo di insieme è, e la sua dimensione.

3) *(8 punti)* Si consideri in $\mathbb{R}^3$, munito del prodotto scalare canonico, il piano H di equazione

$$H : 2x - 3y + z = 1.$$

   (a) *(4 punti)* Determinare equazioni cartesiane della retta r passante per il punto $Q = (1, 0, 1)$ e ortogonale ad H.

   (b) *(4 punti)* Determinare un'equazione cartesiana del piano J che contiene r e passante per $U = (0, 1, -1)$.