Nome .... **Cognome** ....

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Prova scritta di Geometria per Ingegneria Navale e Industriale

III appello d'esame — A. A. 2022-2023

20/2/2023

È necessario rispondere correttamente ad almeno 6 domande a risposta multipla nel relativo foglio. Non occorre giustificare le risposte a crocette. Ciascuna domanda a risposta multipla giusta vale 0,5 punti.

Gli esercizi valgono al massimo 26 punti (totale 30/30). Le risposte agli esercizi vanno brevemente giustificate. Per essere ammessi all'orale servono almeno 15 punti.

Domande a risposta multipla

1) Per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ sono linearmente indipendenti?

   $\boxed{\text{A}}$ Per ogni $a \in \mathbb{C}$

   $\boxed{\text{B}}$ Per ogni $a \neq -2$

   $\boxed{\text{C}}$ Soltanto per $a = \pm\sqrt{2}\, i$

   $\boxed{\text{D}}$ Per ogni $a \neq \pm\sqrt{2}\, i$

2) La matrice

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

   è ortogonale $\boxed{\text{A}}$ Vero $\boxed{\text{B}}$ Falso

3) Le righe di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\boxed{\text{A}}$ $\det A = 0$ $\boxed{\text{B}}$ $\operatorname{rg} A < m$ $\boxed{\text{C}}$ $\operatorname{rg} A < n$ $\boxed{\text{D}}$ $m > n$.

4) Il numero di parametri liberi che occorrono nella soluzione generale di un sistema lineare compatibile a gradini con n incognite e k pivot è

   $\boxed{\text{A}}$ $n - k$ $\boxed{\text{B}}$ $k - n$ $\boxed{\text{C}}$ $n + k$ $\boxed{\text{D}}$ k.

5) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare con $\dim \ker f = 1$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ f è biiettiva

$\boxed{\text{B}}$ f è iniettiva

$\boxed{\text{C}}$ f è suriettiva

$\boxed{\text{D}}$ f non è né iniettiva né suriettiva

6) La forma bilineare $b \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1$$

è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\text{A}}$ Vero $\boxed{\text{B}}$ Falso

7) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare di rango due. Allora:

$\boxed{\text{A}}$ f è suriettiva

$\boxed{\text{B}}$ f è iniettiva

$\boxed{\text{C}}$ f non è iniettiva

$\boxed{\text{D}}$ $\dim \ker f = 2$

8) Consideriamo $\mathbb{R}^4$ col prodotto scalare canonico, e sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale di dimensione due. Allora $\dim U^\perp =$

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ 2 $\boxed{\text{C}}$ 3

Esercizi

1) *(10 punti)* Consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *(2 punti)* Dimostrare che $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad f(v_3) = w_3.$$

(b) *(2 punti)* Determinare le matrici $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{E}_3}(f)$ e $M_{\mathcal{E}_3}(f)$.

(c) *(1 punto)* Dire se f è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^3$.

(d) *(5 punti)* Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza f e la matrice che rappresenta f in tale base.

2) *(9 punti)* Si consideri il sistema reale dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y + kz = 0 \\ kx + y - 2z = 1 \\ (k+1)y + kz = 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori di k il sistema è compatibile e risolverlo, descrivendo anche l'insieme delle soluzioni, che tipo di insieme è, e la sua dimensione.

3) *(7 punti)* Si consideri in $\mathbb{R}^3$, munito del prodotto scalare canonico, la retta r di equazione

$$r : \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

(a) *(5 punti)* Determinare un'equazione cartesiana del piano H passante per il punto $Q = (1, 0, 1)$ e ortogonale ad r.

(b) *(2 punti)* Calcolare la distanza tra il punto $a = (1, 1, 1)$ e H.