**Nome** ........................... **Cognome** ................................

# Dipartimento di Ingegneria e Architettura

## Prova scritta di Geometria per Ingegneria Navale e Industriale

## IV appello d'esame — A. A. 2022-2023

19/6/2023

È necessario rispondere correttamente ad almeno 6 domande a risposta multipla nel relativo foglio. Non occorre giustificare le risposte a crocette. Ciascuna domanda a risposta multipla giusta vale 0,5 punti.

Gli esercizi valgono al massimo 26 punti (totale 30/30). Le risposte agli esercizi vanno brevemente giustificate. Per essere ammessi all'orale servono almeno 15 punti.

### Domande a risposta multipla

1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ $\boxed{\text{A}}$ 3 $\boxed{\text{B}}$ 0 $\boxed{\text{C}}$ $-8$ $\boxed{\text{D}}$ 9

2) La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

è ortogonale $\boxed{\text{A}}$ Vero $\boxed{\text{B}}$ Falso

3) Le colonne di $A \in M_n(\mathbb{R})$, con $n \geq 2$, formano una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se $\boxed{\text{A}}$ $\operatorname{rg} A \neq 0$ $\boxed{\text{B}}$ $\det A = 0$ $\boxed{\text{C}}$ $\det A \neq 0$ $\boxed{\text{D}}$ $\operatorname{rg} A < n$.

4) Il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{A}}$ Vero $\boxed{\text{B}}$ Falso

5) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare con $\dim \ker f = 1$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $f$ è biiettiva $\boxed{\text{C}}$ $f$ è suriettiva

$\boxed{\text{B}}$ $f$ è iniettiva $\boxed{\text{D}}$ $f$ non è né iniettiva né suriettiva

6) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $\operatorname{rg} f =$

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{D}}$ 3 $\boxed{\text{E}}$ I dati non sono sufficienti

7) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0\}$ è

$\boxed{\text{A}}$ un piano affine non vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{B}}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{C}}$ una retta

$\boxed{\text{D}}$ l'insieme vuoto.

8) Consideriamo $\mathbb{R}^5$ col prodotto scalare canonico, e sia $W \subset \mathbb{R}^5$ un sottospazio vettoriale di dimensione due. Allora $\dim W^\perp =$

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ 2 $\boxed{\text{C}}$ 3 $\boxed{\text{D}}$ 4

**Esercizi**

1) *(12 punti)* Sia $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'endomorfismo definito ponendo

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

   (a) *(3 punti)* Si scriva la matrice di $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^3$.

   (b) *(4 punti)* Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di $f$.

   (c) *(3 punti)* $f$ è diagonalizzabile?

   (d) *(2 punti)* Esiste un endomorfismo $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $g \circ f$ sia invertibile?

2) *(7 punti)* Risolvere il seguente sistema reale dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, specificando anche la struttura dello spazio delle soluzioni

$$\begin{cases} x + kz = 0 \\ x + 2y - z = k - 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

3) *(7 punti)* Si consideri in $\mathbb{R}^3$, munito del prodotto scalare canonico, la retta $r$ di equazione

$$r: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

   (a) *(5 punti)* Determinare un'equazione cartesiana del piano $H$ passante per il punto $Q = (1, 1, 1)$ e ortogonale ad $r$.

   (b) *(2 punti)* Calcolare la distanza tra il punto $A = (1, 0, 0)$ e $H$.