Nome .... **Cognome** ....

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Prova scritta di Geometria per Ingegneria Navale e Industriale

VI appello d'esame — A. A. 2022-2023

17/7/2023

È necessario rispondere correttamente ad almeno 6 domande a risposta multipla nel relativo foglio. Non occorre giustificare le risposte a crocette. Ciascuna domanda a risposta multipla giusta vale 0,5 punti.

Gli esercizi valgono al massimo 26 punti (totale 30/30). Le risposte agli esercizi vanno brevemente giustificate. Per essere ammessi all'orale servono almeno 15 punti.

Domande a risposta multipla

1) Una matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ è simmetrica se e soltanto se:

$\boxed{\text{A}}$ $M = {}^tM$ $\boxed{\text{B}}$ $MM = I_n$ $\boxed{\text{C}}$ ${}^tMM = I_n$ $\boxed{\text{D}}$ $\det M = \pm 1$

2) Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sono congruenti se e solo se $\exists\, M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tale che

$\boxed{\text{A}}$ $B = M^{-1}AM$

$\boxed{\text{B}}$ $B = A^{-1}MA$

$\boxed{\text{C}}$ $B = {}^tMAM$

$\boxed{\text{D}}$ $B = {}^tAMA$

3) I vettori $(1, t, -2)$ e $(t-1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ sono proporzionali

$\boxed{\text{A}}$ per nessun valore di $t \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{B}}$ solo per $t = 1$

$\boxed{\text{C}}$ per ogni $t \neq 1$

$\boxed{\text{D}}$ solo per $t = 0$

$\boxed{\text{E}}$ nessuna delle precedenti

4) Le colonne di $A \in M_3(\mathbb{R})$ sono base per $\mathbb{R}^3$ se e solo se

$\boxed{\text{A}}$ $\operatorname{rg} A \neq 0$ $\boxed{\text{B}}$ $\operatorname{rg} A = 2$ $\boxed{\text{C}}$ $\det A = 3$ $\boxed{\text{D}}$ esiste A^{-1}

5) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineare di rango 2. Allora f

- $\boxed{\text{A}}$ è biiettiva
- $\boxed{\text{B}}$ è iniettiva
- $\boxed{\text{C}}$ ammette 0 come autovalore
- $\boxed{\text{D}}$ è diagonalizzabile

6) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Allora f

- $\boxed{\text{A}}$ non può essere iniettiva
- $\boxed{\text{B}}$ non può essere suriettiva
- $\boxed{\text{C}}$ è suriettiva
- $\boxed{\text{D}}$ è iniettiva
- $\boxed{\text{E}}$ nessuna della precedenti

7) Il sottoinsieme $L \subset \mathbb{R}^3$ definito da

$$L\colon \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

è

- $\boxed{\text{A}}$ un piano affine non vettoriale
- $\boxed{\text{B}}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$
- $\boxed{\text{C}}$ una retta
- $\boxed{\text{D}}$ l'insieme vuoto.

8) Il seguente sistema lineare reale dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + y + az = a \end{cases}$$

è compatibile: $\boxed{\text{A}}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$ soltanto per $a = 1$ $\boxed{\text{C}}$ $\forall a \neq 1$

Esercizi

1) *(12 punti)* Sia $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'endomorfismo definito da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$$

(a) *(2 punti)* Si scriva la matrice A di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^2$.

(b) *(1 punti)* f è un automorfismo?

(c) *(5 punti)* Determinare una base diagonalizzante per f.

(d) *(4 punti)* Determinare una matrice $U \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, la sua inversa, e una matrice diagonale D tali che $D = U^{-1} A\, U$.

2) *(6 punti)* Risolvere il seguente sistema reale dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, specificando anche la struttura dello spazio delle soluzioni

$$\begin{cases} x + ky - kz = k + 1 \\ kx + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

3) *(8 punti)* Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i punti

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *(3 punti)* Dopo aver verificato che A, B, C non sono allineati, determinare in forma cartesiana il piano H passante per questi punti.

(b) *(5 punti)* Determinare una base ortonormale per la giacitura di H e completarla ad una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$.