

Nome ..... Cognome .....

## Geometria

### I appello d'esame - A. A. 2023-2024

9/1/2024

**Domande a risposta multipla.** Ciascuna domanda ammette una sola risposta esatta che vale 1 punto. Le risposte non vanno giustificate.

**Esercizi.** Valgono al massimo 20 punti (totale 30/30). Le risposte vanno giustificate.

**Ammissione all'orale.** Occorrono almeno 5 punti alle risposte multiple e 18 in totale.

Vanno consegnati il foglio con le domande a risposta multipla e i fogli di bella copia con le soluzioni degli esercizi. Scrivere nome e cognome (in stampatello) su tutti i fogli e numerarli. Usare solo penna blu o nera. Il tempo a disposizione è di 3 ore.

#### Domande a risposta multipla

1)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$   A 0     B 2     C -2     D -5     E 5

2) Quale tra i seguenti numeri è radice cubica di  $i$ ?

A  $-i$      B  $\frac{i}{3}$      C  $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$      D  $\frac{\sqrt{2}+i}{3}$      E 1

3) Qual è l'argomento di  $\sqrt{3}+i$ ?

A  $\frac{\pi}{6}$      B  $\frac{\pi}{3}$      C  $-\frac{\pi}{6}$      D 2     E  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) Per quali  $a \in \mathbb{C}$  il seguente sistema lineare complesso è compatibile?

$$\begin{cases} ax - y = 0 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

A  $a = \pm i$      B  $a \neq \pm i$      C  $a \neq i$      D  $a \neq 0$      E  $\forall a \in \mathbb{C}$

5) Il vettore  $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  è autovettore della matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ .

- A Vero       B Falso       C I dati non sono sufficienti.

6) Il numero minimo di equazioni per descrivere un piano affine in  $\mathbb{R}^3$  è:

- A 1       B 2       C 3       D 4       E non esiste

7) Una matrice  $M \in M_n(\mathbb{R})$  è simmetrica se e solo se:

- A  $M = {}^tM$        B  $M = M^{-1}$        C  ${}^tM = M^{-1}$        D  $\det M = \pm 1$

8) La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

è ortogonale  A Vero       B Falso

9) Esiste un'applicazione lineare suriettiva  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

- A Vero       B Falso

10) Una matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  è diagonalizzabile se:

- A ha tutti gli autovalori reali  
 B è ortogonale  
 C è simmetrica

## Esercizi

1) (10 punti) Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \\ -x + y \end{pmatrix}$$

dove  $\mathbb{R}^3$  è munito del prodotto scalare canonico.

- (a) (2 punti) Scrivere la matrice  $A$  di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .
  - (b) (1 punto)  $f$  è un isomorfismo?
  - (c) (1 punto)  $f$  è autoaggiunta?
  - (d) (6 punti) Determinare una base ortonormale diagonalizzante per  $f$ .
- 2) (10 punti) Si consideri il sottospazio vettoriale  $U \subset \mathbb{R}^3$  di equazione

$$U: x - y + 2z = 0$$

- (a) (1 punto) Calcolare  $\dim U$ .
- (b) (5 punti) Determinare una base ortonormale per  $U$ .
- (c) (1 punto) Verificare che il vettore seguente appartiene a  $U$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (d) (3 punti) Calcolare le coordinate di  $w$  rispetto alla base del punto (b).