Nome .... **Cognome** ....

Geometria per Ingegneria Navale e Industriale
II appello - A. A. 2023-2024

6/2/2024

Domande a risposta multipla. Ciascuna domanda ammette una sola risposta esatta che vale 1 punto. Le risposte non vanno giustificate.

Esercizi. Valgono al massimo 20 punti (totale 30/30). Le risposte vanno giustificate.

Ammissione all'orale. Occorrono almeno 5 punti alle risposte multiple e 18 in totale.

Vanno consegnati il foglio con le domande a risposta multipla e i fogli di bella copia con le soluzioni degli esercizi. Scrivere nome e cognome (in stampatello) su tutti i fogli e numerarli. Usare solo penna blu o nera. Il tempo a disposizione è di 3 ore.

Domande a risposta multipla

1) Per quali $k \in \mathbb{R}$ le colonne della matrice seguente formano una base per $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{A}}$ $k \neq 0$ $\boxed{\text{B}}$ $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\boxed{\text{C}}$ $k \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\boxed{\text{D}}$ $k \neq \pm 1$ $\boxed{\text{E}}$ $k = \pm 1$

2) Qual è il coniugato di $i - 1$?

$\boxed{\text{A}}$ $i + 1$ $\boxed{\text{B}}$ 2 $\boxed{\text{C}}$ $2i$ $\boxed{\text{D}}$ $1 - i$ $\boxed{\text{E}}$ $-1 - i$

3) Qual è l'argomento di $i - 1$?

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{2}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{D}}$ 0 $\boxed{\text{E}}$ $\frac{\pi}{4}$

4) Per quali $k \in \mathbb{R}$ i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{A}}$ $\forall\, k \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$ nessun $k \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$ $k = 0$ $\boxed{\text{D}}$ $k \neq 0$ $\boxed{\text{E}}$ $k = 1$

5) Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A Vero B Falso C I dati non sono sufficienti.

6) Quale delle seguenti matrici reali è a gradini?

A $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ D Nessuna

7) Una matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale se e solo se:

A $M = {}^tM$ B $M = M^{-1}$ C ${}^tM = M^{-1}$ D $\det M = \pm 1$

8) La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

è ortogonale A Vero B Falso

9) Esiste un'applicazione lineare iniettiva $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

A Vero B Falso C Non si può stabilire

10) Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile se:

A ha n autovalori reali distinti

B è invertibile

C non è invertibile

Esercizi

1) *(10 punti)* Consideriamo i vettori di $\mathbb{C}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *(2 punti)* Dimostrare che $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{C}^3$ e che esiste un'unica applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad f(v_3) = w_3.$$

(b) *(2 punti)* Determinare le matrici $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{V}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^3})$ e $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(f)$.

(c) *(1 punto)* Calcolare $\det f$.

(d) *(5 punti)* Determinare una base di $\mathbb{C}^3$ che diagonalizza f e la matrice che rappresenta f in tale base.

2) *(10 punti)* Si consideri il sottospazio vettoriale $U \subset \mathbb{R}^4$ di equazioni

$$U: \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) *(2 punti)* Calcolare $\dim U$.

(b) *(5 punti)* Determinare una base ortonormale per U.

(c) *(1 punto)* Verificare che il vettore seguente appartiene a U

$$w = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) *(2 punti)* Calcolare le coordinate di w rispetto alla base del punto (b).