Nome .... **Cognome** ....

Geometria per Ingegneria Navale e Industriale
III appello - A. A. 2023-2024

19/2/2024

Domande a risposta multipla. Ciascuna domanda ammette una sola risposta esatta che vale 1 punto. Le risposte non vanno giustificate.

Esercizi. Valgono al massimo 20 punti (totale 30/30). Le risposte vanno giustificate.

Ammissione all'orale. Occorrono almeno 5 punti alle risposte multiple e 18 in totale.

Vanno consegnati il foglio con le domande a risposta multipla e i fogli di bella copia con le soluzioni degli esercizi. Scrivere nome e cognome (in stampatello) su tutti i fogli e numerarli. Usare solo penna blu o nera. Il tempo a disposizione è di 3 ore.

Domande a risposta multipla

1) Qual è l'angolo tra i seguenti vettori rispetto al prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ -3 $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{E}}$ $\frac{3\pi}{4}$

2) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Allora f

$\boxed{\text{A}}$ non può essere suriettiva

$\boxed{\text{B}}$ non può essere iniettiva

$\boxed{\text{C}}$ è suriettiva

$\boxed{\text{D}}$ è iniettiva

$\boxed{\text{E}}$ nessuna della precedenti

3) Le colonne di una matrice $A \in M_{4,5}(\mathbb{R})$ generano $\mathbb{R}^4$ se e solo se

$\boxed{\text{A}}$ $\operatorname{rg} A = 2$ $\boxed{\text{B}}$ $\operatorname{rg} A = 3$ $\boxed{\text{C}}$ $\operatorname{rg} A = 4$ $\boxed{\text{D}}$ $\operatorname{rg} A = 5$

4) Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sono congruenti se e solo se $\exists\, M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tale che

$\boxed{\text{A}}$ $B = M^{-1}AM$ $\boxed{\text{B}}$ $B = {}^tAMA$ $\boxed{\text{C}}$ $B = {}^tMAM$

5) Il numero di parametri liberi che occorrono nella soluzione generale di un sistema lineare compatibile a gradini con n incognite e k pivot è

$\boxed{\text{A}}$ $k - n$ $\boxed{\text{B}}$ $n + k$ $\boxed{\text{C}}$ $n - k$ $\boxed{\text{D}}$ k.

6) Che tipo di insieme è il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$?

$$L\colon \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{A}}$ un punto

$\boxed{\text{B}}$ una retta affine

$\boxed{\text{C}}$ un piano affine

$\boxed{\text{D}}$ nessuna delle precedenti.

7) Il seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (a^4 - 1)x = 1 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{C}$ è un parametro, è compatibile per:

$\boxed{\text{A}}$ ogni $a \in \mathbb{C}$ $\boxed{\text{B}}$ nessun $a \in \mathbb{C}$ $\boxed{\text{C}}$ $a \neq \pm 1, \pm i$ $\boxed{\text{D}}$ $a = \pm 1$

8) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare suriettiva. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\operatorname{rg} f = 1$ $\boxed{\text{B}}$ $\dim\ker f = 1$ $\boxed{\text{C}}$ $\dim\ker f = 2$

9) Un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un isomorfismo se e solo se

$\boxed{\text{A}}$ 0 è autovalore di f $\boxed{\text{C}}$ $\dim\ker f = 0$

$\boxed{\text{B}}$ $\dim\ker f \neq 3$ $\boxed{\text{D}}$ nessuna delle precedenti

10) Siano $A, B \in \mathrm{O}(n)$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $AB \in \mathrm{SO}(n)$ $\boxed{\text{B}}$ $AB \in \mathrm{O}(n)$ $\boxed{\text{C}}$ $A + B \in \mathrm{O}(n)$

Geometria per Ingegneria Navale e Industriale
III appello - A. A. 2023-2024

19/2/2024

Esercizi

1) *(10 punti)* Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ col prodotto scalare canonico, i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(*a*) *(2 punti)* Dimostrare che $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad f(v_3) = w_3.$$

(*b*) *(2 punti)* Determinare le matrici $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{V}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ e $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(f)$.

(*c*) *(1 punto)* f è autoaggiunto?

(*d*) *(5 punti)* Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza f e la matrice che rappresenta f in tale base.

2) *(10 punti)* Si consideri il sottospazio vettoriale $U \subset \mathbb{R}^4$ di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(*a*) *(1 punti)* Calcolare $\dim U$.

(*b*) *(4 punti)* Determinare una base ortonormale per U.

(*c*) *(3 punti)* Determinare una base ortonormale per $U^\perp$.

(*d*) *(2 punti)* Determinare la proiezione ortogonale su U del vettore seguente, esprimento il risultato rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$