Nome .... **Cognome** ....

Geometria per Ingegneria Navale e Industriale
IV appello - A. A. 2023-2024

2/7/2024

Domande a risposta multipla. Ciascuna domanda ammette una sola risposta esatta che vale 1 punto. Le risposte non vanno giustificate.

Esercizi. Valgono al massimo 20 punti (totale 30/30). Le risposte vanno giustificate.

Ammissione all'orale. Occorrono almeno 5 punti alle risposte multiple e 18 in totale.

Vanno consegnati il foglio con le domande a risposta multipla e i fogli di bella copia con le soluzioni degli esercizi. Scrivere nome e cognome (in stampatello) su tutti i fogli e numerarli. Usare solo penna blu o nera. Il tempo a disposizione è di 3 ore.

Domande a risposta multipla

1) Qual è la rappresentazione trigonometrica del numero complesso $5+5i$?

$\boxed{\text{A}}$ $5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $\boxed{\text{B}}$ $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{\pi}{2}$

2) $(2-i)^{-1} =$ $\boxed{\text{A}}$ $2+i$ $\boxed{\text{B}}$ $2-i$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

3) Sia $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare non nulla e non suriettiva.
Allora $\dim\ker f =$ $\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{D}}$ 3 $\boxed{\text{E}}$ 4

4) Consideriamo quattro vettori $v_1,v_2,v_3,v_4\in\mathbb{R}^3$. Allora:

$\boxed{\text{A}}$ v_1,v_2,v_3,v_4 sono linearmente dipendenti

$\boxed{\text{B}}$ v_1,v_2,v_3 sono linearmente indipendenti

$\boxed{\text{C}}$ l'insieme $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ contiene una base per $\mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{D}}$ nessuna delle precedenti è vera.

5) Se due matrici $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ sono simili allora:

$\boxed{\text{A}}$ $A = B$ $\boxed{\text{B}}$ $A = {}^tB$ $\boxed{\text{C}}$ $\det A = \det B$ $\boxed{\text{D}}$ $A = B^{-1}$

6) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ sono perpendicolari le rette $r, s \subset \mathbb{R}^2$ di equazioni

$$r:\ x + ky = 2 + k^2 \qquad s:\ x - ky = 1$$

$\boxed{\text{A}}$ $k = 0$ $\boxed{\text{B}}$ $k \neq 0$ $\boxed{\text{C}}$ $k = \pm 1$ $\boxed{\text{D}}$ $k \neq \pm 1$ $\boxed{\text{E}}$ $\forall\, k \in \mathbb{R}$

7) Qual è la distanza tra i seguenti punti di $\mathbb{R}^3$?

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{A}}$ 3 $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{3}$ $\boxed{\text{C}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{14} - 3$ $\boxed{\text{E}}$ -2

8) Per quali $k \in \mathbb{C}$ la seguente matrice complessa è invertibile?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ k & -k & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{A}}$ $k = -1$ $\boxed{\text{B}}$ $k \neq -1$ $\boxed{\text{C}}$ $k \neq 0$ $\boxed{\text{D}}$ nessuno $\boxed{\text{E}}$ $\forall\, k \in \mathbb{C}$

9) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare suriettiva. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\operatorname{rg} f = 2$

$\boxed{\text{B}}$ $\dim \ker f = 2$

$\boxed{\text{C}}$ f è un isomorfismo

$\boxed{\text{D}}$ f non è iniettiva

$\boxed{\text{E}}$ nessuna delle precedenti

10) Quale tra le seguenti matrici è ortogonale?

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{C}}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{D}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Geometria per Ingegneria Navale e Industriale
IV appello - A. A. 2023-2024

2/7/2024

Esercizi

1) *(10 punti)* Consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definita come

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ y + 2z \\ z + 2x \end{pmatrix}$$

   (a) *(1 punti)* Verificare che f è lineare.

   (b) *(2 punti)* Determinare la matrice $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(f)$.

   (c) *(1 punto)* f è un isomorfismo?

   (d) *(6 punti)* Determinare una base $\mathcal{U}$ di $\mathbb{C}^3$ che diagonalizza f, la matrice che rappresenta f rispetto a tale base e la matrice del cambio di base $M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}_3}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^3})$.

2) *(10 punti)* Si consideri il piano $H \subset \mathbb{R}^3$ di equazione

$$H : x + 2\alpha y - 3z = \alpha + 1$$

   dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

   (a) *(1 punti)* Determinare α in modo che H passi per l'origine e si ponga α uguale a questo valore nei quesiti successivi.

   (b) *(5 punti)* Determinare una base ortonormale per H, considerando su $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare canonico.

   (c) *(2 punti)* Determinare una base ortonormale per $H^\perp$.

   (d) *(2 punti)* Determinare la proiezione ortogonale di e_1, primo vettore della base canonica, su $H^\perp$.