ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA
A.A. 2024/2025
SIMULAZIONE PROVA SCRITTA 17/12/24

(1) Si dimostri che se C è una curva affine irriducibile di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ di grado $d \geq 2$, allora C ha al più d asintoti distinti.
Si esibisca una equazione di una cubica affine complessa con esattamente 3 asintoti.

(2) Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) F di equazione
$$x_0x_1^5 - x_0x_1^3x_2^2 - x_2^6 = 0.$$
(a) Determinarne i punti singolari, la loro molteplicità su F e le rette tangenti nei punti singolari;
(b) si determini una parametrizzazione razionale della curva (suggerimento: si consideri un opportuno fascio di rette).

(3) Si considerino i punti $A = (1:0:-1),\ B = (0:1:0),\ C = (1:0:0)$ e $D = (0:1:1)$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Si considerino le seguenti rette:

- r di equazione $x_0 + x_2 = 0$,
- s di equazione $x_1 = 0$,
- t di equazione $2x_1 - 2x_2 - x_0 = 0$.

Sia W l'insieme delle quartiche piane proiettive $\mathcal{Q}$ che verificano le seguenti condizioni:
(i) A è un punto singolare;
(ii) $I_B(\mathcal{Q}, r) \geq 3$;
(iii) C è un punto singolare e $I_C(\mathcal{Q}, s) \geq 3$;
(iv) la retta t è tangente a $\mathcal{Q}$ nel punto D.

Si dica:
(a) se W è un sistema lineare di curve e, in caso affermativo, se ne determini la dimensione;
(b) se esiste in W una quartica avente B come punto triplo.

① Per definizione un asintoto è una retta affine reale, tangente a un punto semplice improprio.

Data una curva affine di grado $d \geq 2$, la sua chiusura proiettiva ha grado d, quindi per il Teorema di Bézout la curva ha al più d punti impropri. Come conseguenza abbiamo al più d asintoti.

Un esempio in grado $d=3$ è dato da:

$$xy(x-y)+x^2+2xy+y^2-x+3y=0$$

i punti impropri sono $(0:0:1)$, $(0:1:0)$, $(0:1:1)$. Sono tutti non singolari.

le tg nei punti impropri:

$$x_1x_2(x_1-x_2)+x_1^2x_0+2x_1x_2x_0+x_2^2x_0-x_1x_0^2+3x_2x_0^2=0$$

$$d_{x_0} = x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_0+6x_2x_0$$

$$dx_1 = x_2(x_1-x_2)+x_1x_2+2x_1x_0+2x_2x_0-x_0^2$$

$$dx_2 = x_1(x_1-x_2)-x_1x_2+2x_1x_0+2x_0x_2+3x_0^2$$

$$\tau_{(0:0:1)}\overline{C} : \quad x_0-x_1=0 \quad : \quad 1-x=0$$

$$\tau_{(0:1:0)}\overline{C} : \quad x_0+x_2=0 \quad : \quad 1+y=0$$

$$\tau_{(0:1:1)}\overline{C} : \quad 4x_0+x_1-x_2=0 : \quad 4+x-y=0$$

② $$x_0x_1^5-x_0x_1^3x_2^2+x_2^6=0$$

ⓐ
$$d_{x_0} = x_1^5-x_1^3x_2^2 \qquad =0 \qquad x_1=0$$

$$\Uparrow$$

$$d_{x_1} = 5x_0x_1^4-3x_0x_1^2x_2^2 \qquad =0$$

$$dx_1 = 6x_2^5 \qquad =0 \quad \Leftarrow \quad x_2=0$$

Unico punto singolare $(1:0:0)$, di molt. 5 (è del tipo $f_d+f_{d-1}=0$)

Eq. affine: $x^5-x^3y^2+y^6=0$, eq. cono tg

$x^5-x^3y^2=0$, $x^3(x-y)(x+y)=0 \Rightarrow$ le tg principali sono:
- $x=0$
- $x-y=0$
- $x+y=0$

ⓑ Cons. il fascio affine $y=tx$; interseco con la curva

$$\begin{cases} x^5-x^3y^2+y^6=0 \\ y=tx \end{cases}$$

$x^5-t^2x^5+t^6x^6=0$

$x^5(1-t^2+t^6x)=0$, residualmente alla radice $x=0$ trovo $x=\dfrac{t^2-1}{t^6}$

Poi $y=t\cdot x = \dfrac{t^2-1}{t^5}$; una param. affine è $t \in \mathbb{A}^1 \longrightarrow \left(\dfrac{t^2-1}{t^6}, \dfrac{t^2-1}{t^5}\right) \in \mathbb{A}^2$

Una param. proiettiva è $(t_0:t_1) \in \mathbb{P}^1 \longrightarrow \left(t_1^6 : t_0^4(t_1^2-t_0^2) : t_0^3t_1(t_1^2-t_0^2)\right) \in \mathbb{P}^2$

$A = (1:0:-1)$

$B = (0:1:0)$

$C = (1:0:0)$

$D = (0:1:1)$

$r: \ x_0 + x_2 = 0$

$s: \ x_1 = 0$

$t: \ 2x_1 - 2x_2 - x_0 = 0$

OSS: $A \in r$ e $B \in r$

A singolare, $I_B(Q,r) \geq 3 \Rightarrow \sum I_P(Q,r) \geq 2+3 = 5$

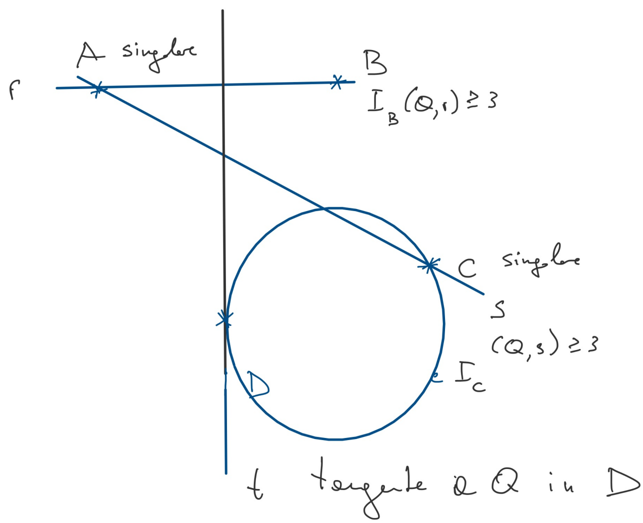
$\Rightarrow r \subseteq Q$

$A \in s$, $C \in s \Rightarrow \sum I_P(Q,s) \geq 2+3 = 5$

$I_C(Q,s) \geq 3$

$\Rightarrow s \subseteq Q$

$Q = Q_1 \cup r \cup s$, con Q conica



$\Rightarrow$ $\mathcal{W}$ è costituito da quartiche riducibili, tutte contenenenti le rette r ed s, ed aventi come ulteriore componente una conica passante per C e tg a t nel punto D; tali coniche formano un sistema lineare di dim (proiettiva) 2 (le condizioni lineari sono: passaggio per C (1 condizione) e tg in D a t (2 condizioni); $5-3=2$.

(b) B non può essere triplo; per esserlo, la conica dovrebbe essere singolare in B, quindi unione delle rette $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$; ma allora non si avrebbe la tangenza a t in D (perché $t \neq \overline{BD}$).