

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II

A.A. 2024/2025 - INGEGNERIA

SIMULAZIONE DEL 16.12.2024

1. Determinare tutti i punti stazionari della funzione

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2)z^2 - 2xz,$$

osservare che l'origine è un punto stazionario e determinare inoltre la natura di $(0, 0, 0)$ quale punto stazionario.

2. Data la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n+2}}{(x+1)^n} \quad x \geq 0,$$

trovare l'insieme di convergenza puntuale, l'insieme di convergenza uniforme e la somma ove possibile.

3. Sia E l'insieme limitato di $\mathbb{R}^3$ delimitato dai piani coordinati e dal piano $x + 2y + 3z = 4$. Calcolare

$$\int_E (y + 1) dx dy dz.$$

4. Trovare una 3-parametrizzazione σ dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\}.$$

Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = 4x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + 2x^{12} dx \wedge dy$$

su $\partial\sigma$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. I punti stazionari di F sono i punti in cui il suo gradiente è nullo. Siccome

$$\nabla F(x, y, z) = (2xz^2 - 2z, -2yz^2, 2z(x^2 - y^2) - 2x),$$

i punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2xz^2 - 2z = 0 \\ -2yz^2 = 0 \\ 2z(x^2 - y^2) - 2x = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione: $y = 0$ o $z = 0$. Se $z = 0$ anche la prima equazione è soddisfatta e dalla terza equazione otteniamo $x = 0$. Quindi tutti i punti $(0, y, 0)$ con $y \in \mathbb{R}$ sono punti stazionari. Se $y = 0$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 2xz^2 - 2z = 0 \\ 2zx^2 - 2x = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} z(xz - 1) = 0 \\ x(xz - 1) = 0, \end{cases}$$

che ha le soluzioni $x = z = 0$ e $xz = 1$. Quindi troviamo i punti stazionari $(0, 0, 0)$ (già considerato) e $(x, 0, \frac{1}{x})$ con $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

Per determinare la natura di $(0, 0, 0)$ quale punto stazionario osserviamo che $F(0, 0, 0) = 0$. Siccome $F(x, x, x) = -2x^2 < 0$ per $x \neq 0$, il punto $(0, 0, 0)$ non è punto di minimo. Essendo $F(x, x, -x) = 2x^2 > 0$ per $x \neq 0$ concludiamo che $(0, 0, 0)$ non è punto di massimo.

Esercizio 2. Osserviamo che si tratta di una serie di funzioni di termine generale $n \frac{x^{n+2}}{(x+1)^n}$ ben definito per tutti gli $x \geq 0$. Se $x = 0$ tutti i termini sono nulli quindi anche la somma della serie è uguale a 0.

Osserviamo inoltre che possiamo scrivere

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n+2}}{(x+1)^n} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{x+1} \right)^n.$$

Per studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{x+1} \right)^n$ conviene effettuare la sostituzione

ne $t = \frac{x}{x+1}$. La serie ottenuta, $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$, ha raggio di convergenza $R = 1$ (infatti $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$), quindi la serie converge per $t \in (-1, 1)$ e converge uniformemente in ogni intervallo $[-r, r]$ con $0 < r < 1$.

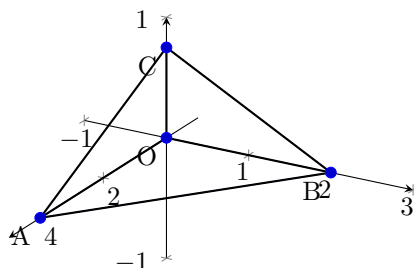
Per calcolare la sua somma osserviamo che $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n = t \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$ e che $nt^{n-1} = (t^n)'$. Siccome la serie che ci interessa si ottiene derivando termine a termine la serie geometrica, nell'insieme di convergenza uniforme, la sua somma è uguale alla derivata della somma della serie

geometrica. Essendo $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ per $t \in (-1, 1)$, deduciamo che $\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = \left(\frac{1}{1-t} \right)' =$

$\frac{1}{(1-t)^2}$. Di conseguenza $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n = \frac{t}{(1-t)^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n+2}}{(x+1)^n} = x^2 \frac{\frac{x}{x+1}}{(1 - \frac{x}{x+1})^2} = x^3(x+1)$.

Resta ancora da scrivere in termini di x l'insieme di convergenza puntuale e l'insieme di convergenza uniforme. Essendo $t = \frac{x}{x+1}$ troviamo che per ogni $x \geq 0$ si ha $0 \leq t \leq 1$, quindi la serie converge puntualmente in $[0, +\infty)$. La serie data converge uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato $[0, M]$ con $M > 0$. Infatti, se $x \in [0, M]$ allora $t \in [0, r]$ con $r = \frac{M}{M+1}$.

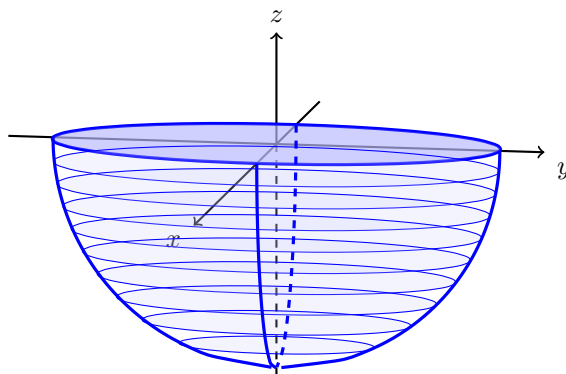
Esercizio 3. L'insieme E è un tetraedro. Il piano $x + 2y + 3z = 4$ interseca il piano $z = 0$ nella retta $x + 2y = 4 \wedge z = 0$, interseca il piano $y = 0$ nella retta $x + 3z = 4 \wedge y = 0$ e il piano $x = 0$ nella retta $2y + 3z = 4 \wedge x = 0$. Troviamo dunque i vertici del tetraedro: $O = (0, 0, 0)$, $A = (4, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ e $C = (0, 0, 3/4)$.



Usando il Teorema di Fubini otteniamo

$$\begin{aligned} \int_E (y+1) dx dy dz &= \int_0^2 \left(\int_0^{4-2y} \left(\int_0^{\frac{1}{3}(4-2y-x)} (y+1) dz \right) dx \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} \int_0^{4-2y} (y+1)(4-2y-x) dx \right) dy = \frac{1}{3} \int_0^2 (y+1) \frac{1}{2} (4-2y)^2 dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^2 (y+1)(2-y)^2 dy = \frac{2}{3} 4 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.



L'insieme E è la parte di un ellissoide situata sotto il piano $z = 0$. Una sua parametrizzazione è data dalle coordinate sferiche modificate: $\sigma(\rho, \varphi, \theta) = (x, y, z)$ con

$$\begin{cases} 2x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi, \end{cases}$$

dove $\rho \in [0, 1]$, $\varphi \in [\pi/2, \pi]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Si ha

$$\det J\sigma(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{2} \rho^2 \sin \varphi > 0$$

per $\rho > 0$, $\varphi \in (0, \pi)$ e $\theta \in (0, 2\pi)$. Per il calcolo dell'integrale conviene usare il teorema di Stokes-Cartan:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega,$$

che in questo caso particolare è il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_E \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz,$$

con $F(x, y, z) = (4x^3, y^3, 12x^{12})$. Si ha

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(12x^{12}) = 12x^2 + 3y^2.$$

Usando il cambio di coordinate dato da σ si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_E \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^1 \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\pi} 3\rho^2 \sin^2 \varphi \frac{1}{2} \rho^2 \sin \varphi d\theta d\varphi d\rho \\ &= \frac{3}{5} \pi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{3}{5} \pi \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{3}{5} \pi \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5} \pi. \end{aligned}$$