ANOMALY CANCELLATION CONDITIONS (Anomalia deve essere assente per le simm. di GAUGE)

1) VECTOR-LIKE MODEL (es. QED, QCD):

A_μ si accoppia a j^μ_V → l'ANOMALIA può essere confinata a j^μ_A con opportuna scelta di regolarizzaz.
↳ non è gaugiata ⇒ ok!

2) "SAFE GROUPS".

Prendiamo modelli con molti fermioni L e R accoppiati diversam. ai bosoni di gauge ⇝ ci sono anomalie nelle sim. di gauge. Però l'anomalia può annullarsi per casi particolari: ricordiamo che l'anomalia è proporzionale a

$$C^{abc} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(\{t^a, t^b\} t^c\right)$$

Se $C^{abc} = 0$, tutte le anomalie si cancellano.

Questo avviene per

$SU(2)$, $SO(2N+1)$, $SO(4N)$ $N \geq 2$, E_6, E_8

⇝ In particolare $SU(N)$ $N \geq 3$ non sono safe.

3) MODELLO STANDARD : $SU(2)_L \times SU(3)_c \times U(1)_Y$

- Qui i bosoni di gauge accoppiano diversamente alle correnti L e R.
- In 4d il coniugato di uno spinore R è uno spinore L: possiamo quindi riscrivere la teoria usando solo spinori L (se in formulaz. standard avevamo uno spin. R in rep. r, nella nuova formulaz. avremo uno spinore L in rep $\bar{r}$.)

Il contenuto di una FAMIGLIA è il seguente:

	Standard Rep	Rep with L-hand fermions
ℓ_L	$(2,1)_{-3}$	$(2,1)_{-3}$
e_R	$(1,1)_{-6}$	$(1,1)_{+6}$
q_L	$(2,3)_1$	$(2,3)_1$
u_R	$(1,3)_4$	$(1,\bar{3})_{-4}$
d_R	$(1,3)_{-2}$	$(1,\bar{3})_2$

nel loop circolano tutti i fermioni accoppiati ai bosoni di gauge

Chiamiamo t^i i generatori di $SU(2)$, λ^a i gen. di $SU(3)$ e T_Y il gen. di $U(1)_Y$.

Dobbiamo calcolare i vari $\mathrm{tr}(\{T^A, T^B\} T^C)$ con $T = t, \lambda, T_Y$

$$\mathrm{tr}(T^A T^B T^C + T^B T^A T^C) = \mathrm{tr}(T^A T^B T^C + T^A T^C T^B) = \mathrm{tr}(T^A \{T^B, T^C\})$$

In una data rep $(N,M)_q$, i gen di G_{SM} saranno matrici $\underline{N \times M}$ dimensionali: $t^i_{(N,M)_q} = t^i_N \otimes 1_M$,

$\lambda^a_{(N,M)_q} = 1_N \otimes \lambda^a_M$ $\quad (T_Y)_{(N,M)_q} = q\, 1_N \otimes 1_M$

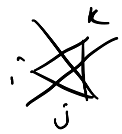
Una FAMIGLIA è una rep. riducibile $R = \bigoplus_{I \in \text{rep in fam.}} (N_I, M_I)_{q_I}$, $\quad (N_I, M_I)_{q_I} \equiv R_I$

In una famiglia i gen. sono dati da

$$t^i = \begin{pmatrix} t^i_{(N_1,M_1)q_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^i_{(N_2,M_2)q_2} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \qquad T_Y = \begin{pmatrix} q_1 \mathbb{1}_{N_1M_1} & 0 & 0 \\ 0 & q_2 \mathbb{1}_{N_2M_2} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\lambda^a = \begin{pmatrix} \lambda^a_{(N_1,M_1)q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^a_{(N_2,M_2)q_2} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

Abbiamo che

- Per $SU(2)$ $\quad C^{ijk} = 0 \rightarrow \mathrm{tr}(t^i t^j t^k) = 0$ 

- $\mathrm{tr}(\{\lambda^a, \lambda^b\}\lambda^c) = 0$ perché $SU(3)$ gauge boson A^a_μ si accoppia alla corrente vettoriale (quindi esiste regolarizzazione che preserva simmetria di gauge $SU(3)$).

- $\mathrm{tr}(t^i T_Y^2) = \mathrm{tr}(\lambda^a T_Y^2) = 0$ $\qquad \mathrm{tr}(A \otimes B) = (\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B)$

  $= q^2\, \mathrm{tr}((t^i_N \otimes \mathbb{1}_M)(\mathbb{1}_N \otimes \mathbb{1}_M)) \propto \mathrm{tr}\, t^i_N = 0$

  $\mathrm{tr}(t^i \lambda^a \lambda^b) = \mathrm{tr}(t^i t^j \lambda^a) = \mathrm{tr}(t^i \lambda^a T_Y) = 0$

- Per rep. triviali di gruppi semplici $T_{\mathbf{1}}^A = 0$ (i corrispondenti fermioni non circolano nel loop)

- $\mathrm{tr}(t^i t^j T_Y) = \sum_I q_I \, \mathrm{tr}(t^i_I t^j_I) = \delta^{ij} \sum_I q_I \, C_{SU(2)}(N_I) \cdot M_I$

$(N_I, M_I)_{q_I}$	$C_{SU(2)}(N_I)$	$C_{SU(3)}(M_I)$
$(2,1)_{-3}$	1/2	0
$(1,1)_{+6}$	0	0
$(2,3)_1$	1/2	1/2
$(1,\bar{3})_{-4}$	0	1/2
$(1,\bar{3})_2$	0	1/2

$$= \delta^{ij}\left(-3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}\cdot 3\right) = 0$$

$$\mathrm{tr}(\lambda^a \lambda^b T_Y) = \sum_I q_I \, \mathrm{tr}(\lambda^a_I \lambda^b_I) = \delta^{ab} \sum_I q_I \, N_I \, C_{SU(3)}(M_I)$$

$$= \delta^{ab}\left(1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\mathrm{tr}(T_Y^3) = \sum_I q_I^3 \cdot N_I M_I =$$

$$= (-3)^3 \cdot 2 \cdot 1 + (6)^3 \cdot 1 \cdot 1 + (1)^3 \cdot 2 \cdot 3 + (-4)^3 \cdot 1 \cdot 3 + (2)^3 \cdot 1 \cdot 3$$

$$= -54 + 216 + 3(2 - 64 + 8)$$

$$= 162 + \underset{\uparrow}{3}(-54) = 0$$

numero colori $\rightsquigarrow$ è essenziale che sia $N_c = 3$ affinché le anomalie si cancellino.

$\longrightarrow$ Le anomalie si cancellano nel Modello Standard!

- Qto avviene indipendentemente dal n° di generazioni. È importante che la famiglia sia completa affinché l'anomalia si cancelli $\rightsquigarrow$ era necessario trovare il quark TOP.

4) NON-LOCAL TERM

Cancelliamo anomalie aggiungendo alla Lagrangiana un termine NON-LOCALE

ES. (Abelian case)

$$S_{non\text{-}loc} = \frac{1}{96\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\int dx\int dy\;\partial^\lambda A^L_\lambda(x)\,D(x-y)\,F^L_{\mu\nu}F^L_{\alpha\beta}(y)$$

$$\delta S_{non\text{-}loc} = \frac{1}{24\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\int dx\;\Lambda^L(x)\,\partial_\mu A^L_\nu(x)\,\partial_\alpha A^L_\beta(x)$$

cancella l'anomalia

5) LOCAL COUNTER-TERMS con campi aggiuntivi

E.g. $$S_{add} = \frac{1}{96\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\int dx\;\varphi^L(x)\,F^L_{\mu\nu}F^L_{\alpha\beta}(x)$$

con $\delta\varphi^L(x) = \Lambda^L(x)$ "axion"