Esercitazioni di “Geometria”
Foglio 10

Titolare del corso: Prof. Danilo Lewanski

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

10 dicembre 2024

“La pratica è la verifica della teoria

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{E}^4$, dati seguenti sottospazi vettoriali:

$$T = \langle(3,-4,3,-4)\rangle,\ U = \{(2,3,1,-2)\}^{\perp}.$$

a) Calcolare una loro rappresentazione cartesiana (rispetto alla base canonica);

b) calcolare le dimensioni di T ed U, e una base per ciascuno;

c) tali spazi vettoriali sono in somma diretta?

d) Dimostrare che esiste un unico endomorfismo lineare f di $\mathbb{E}^4$ tale che:

$$\ker(f) = T,\ \mathrm{Im}(f) = U;$$

e) rappresentare f rispetto alla base canonica di $\mathbb{E}^4$.

Esercizio 2. Rispondere alle domande del precedente esercizio, utilizzando i seguenti sottospazi vettoriali:

$$T_1 = \langle(2,3,1,-2)\rangle,\ U_1 = \{(3,-4,3,-4)\}^{\perp};$$
$$T_2 = \langle(1,0,-1,0),(0,-1,1,0)\rangle,\ U_2 = \{(0,-1,0,-1),(-1,0,0,1)\}^{\perp};$$
$$T_3 = \langle(1,1,1,1),(-1,-1,1,1),(0,0,1,-1)\rangle,\ U_3 = \{(-1,1,0,0),(1,-1,1,-1),(-2,2,1,-1)\}^{\perp}.$$

Esercizio 3. In $\mathbb{E}^3$ si fissi un riferimento affine ortonormale $\mathfrak{R}$.

a) Dati i punti $(A)_{\mathfrak{R}} = (-1,1,0), (B)_{\mathfrak{R}} = (1,0,1), (C)_{\mathfrak{R}} = (0,1,-1)$:

  a.1) determinare la retta r passante per i punti A e B;

  a.2) determinare il piano π_1 passante per C e perpendicolare ad r;

  a.3) determinare il piano π_2 passanti per i dati punti;

a.4) determinare la retta s ortogonale a π_2 e passante per il punto B;

a.5) determinare la retta t intersezione dei precedenti piani (*si può fare in meno di un attimo!*);

a.6) studiare la posizione reciproca delle rette determinate (*si può fare in meno di un attimo!*).

b) Dato il punto $(A)_{\mathfrak{R}} = (0, 1, -1)$ e il vettore $\underline{v} = (1, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$:

b.1) determinare la retta r passante per il punto A di numeri direttori $\underline{v}$;

b.2) determinare il piano π ortogonale ad r e passante per il punto A.

c) Dati i punti $(A)_{\mathfrak{R}} = (-2, 0, 1), (B)_{\mathfrak{R}} = (-1, 2, 0), (C)_{\mathfrak{R}} = (1, 0, -1)$:

c.1) determinare la retta r passante per i punti A e B;

c.2) determinare il piano π passante per C e parallelo ad r.

Esercizio 4. Data la seguente matrice reale simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) dimostrare che $B_A \colon ((x_1, x_2, x_3)\ (y_1, y_2, y_3)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times A \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ è una forma bilineare simmetrica;

b) determinare una base B_A-ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi A;

c) scrivere una matrice diagonalizzante P.

d) P è una matrice ortogonale?

Esercizi 5. Rispondere alle domande del precedente esercizio, utilizzando le seguenti matrici quadrate:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$