Esercitazioni di “Geometria”
Foglio 12

Titolare del corso: Prof. Daniele Zuddas

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

11 dicembre 2024

“La pratica è la verifica della teoria

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{E}^4$, dati seguenti sottospazi vettoriali:

$$T = \langle(3,-4,3,-4)\rangle,\ U = \{(2,3,1,-2)\}^{\perp}.$$

a) Calcolare una loro rappresentazione cartesiana (rispetto alla base canonica);

b) calcolare le dimensioni di T ed U, e una base per ciascuno;

c) tali spazi vettoriali sono in somma diretta?

d) Dimostrare che esiste un unico endomorfismo lineare f di $\mathbb{E}^4$ tale che:

$$\ker(f) = T,\ \mathrm{Im}(f) = U;$$

e) rappresentare f rispetto alla base canonica di $\mathbb{E}^4$.

Esercizio 2. Rispondere alle domande del precedente esercizio, utilizzando i seguenti sottospazi vettoriali:

$$T_1 = \langle(2,3,1,-2)\rangle,\ U_1 = \{(3,-4,3,-4)\}^{\perp};$$
$$T_2 = \langle(1,0,-1,0),(0,-1,1,0)\rangle,\ U_2 = \{(0,-1,0,-1),(-1,0,0,1)\}^{\perp};$$
$$T_3 = \langle(1,1,1,1),(-1,-1,1,1),(0,0,1,-1)\rangle,\ U_3 = \{(-1,1,0,0),(1,-1,1,-1),(-2,2,1,-1)\}^{\perp}.$$

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo 3-dimensionale $\mathbb{E}^3$ si consideri il sottospazio vettoriale $\mathbb{W}$ generato da $\langle(1,1,-1),(1,-1,1)\rangle$.

a) Calcolare una base ortonormale di $\mathbb{W}$.

b) Calcolare $\mathbb{W}^{\perp}$ e un suo vettore generatore normalizzato.

c) **Domanda:** perché basta un solo vettore per rispondere alla precedente richiesta?

Esercizio 4. Ripetere il precedente esercizio coi seguenti sottospazi vettoriali:

$$\mathbb{W}_1 = \langle (1,0,-1), (1,1,0) \rangle \,,$$
$$\mathbb{W}_2 = \langle (1,1,1), (1,0,-1), (2,1,0) \rangle \,,$$
$$\mathbb{W}_3 = \left\langle (1,-1,1), \left(\sqrt{2}, \sqrt{32}, -\sqrt{8}\right) \right\rangle .$$

Esercizio 5. Dato il vettore $(1,-1,1,-1) \in \mathbb{E}^4$, spazio vettoriale euclideo 4-dimensionale. Costruire una base ortonormale di $\mathbb{E}^4$ che lo contiene.

Domanda: tale base ortonormale è unica?

Esercizio 6. Ripetere il precedente esercizio coi seguenti vettori: $(1,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,1,1)$.

Esercizio 7. Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ rappresentato cartesianamente dal seguenti sistemi di equazioni lineari omogenee

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} .$$

a) Calcolare una base ortonormale di $\mathbb{W}$.

b) Completare la precedente base a una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Domanda: tali basi ortonormali sono uniche?

Esercizio 8. Ripetere il precedente esercizio, nello spazio vettoriale euclideo 3-dimensionale $\mathbb{E}^3$, coi sottospazi vettoriali rappresentati cartesianamente dai seguenti sistemi di equazioni lineari omogenee:

$$\begin{cases} y+z+x=0 \\ 2x+3z-y=0 \\ 3x+4z=0 \end{cases} , \quad \begin{cases} 6x-y+z=0 \\ 2x+y+3z=0 \\ 2x+z=0 \end{cases} , \quad \begin{cases} 2y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ -4x+2y-z=0 \end{cases} ,$$
$$\begin{cases} 3x-z+y=0 \\ -3y-2x+z=0 \\ z-2y+x=0 \end{cases} , \quad \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} .$$

Esercizio 9. In $\mathbb{E}^4$, spazio vettoriale euclideo 4-dimensionale, siano dati il vettore $\underline{v} = (0,-1,2,1)$ e il sottospazio vettoriale $\mathbb{W}$ rappresentato cartesianamente dall'equazione lineare omogenea $x-2y+2z-t=0$.

a) Calcolare la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su $\mathbb{W}$.

b) Calcolare la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su $\mathbb{W}^{\perp}$.

Suggerimento: calcolare una base ortonormale di $\mathbb{W}$.

Esercizio 10. Dato il seguente sistema di vettori $\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4\}$:

a) dimostrare che questi è una base di $\mathbb{R}^4$;

b) ortonormalizzare il precedente sistema con l'algoritmo di Gram-Schmidt.

Esercizio 11. Dimostrare che i seguenti sistemi di vettori sono basi, ed ortonormalizzarle secondo l'algoritmo di Gram-Schmidt:

$$\mathcal{H}_2 = \{(1,1),(1,-1)\};$$
$$\mathcal{B}_3 = \{(1,-1,0),(2,0,1),(0,-1,1)\};$$
$$\mathcal{B}_4 = \{(1,0,-1,0),(1,1,0,0),(0,-1,1,0),(-1,0,0,1)\};$$
$$\mathcal{H}_4 = \{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,1,-1,-1),(1,-1,-1,1)\}.$$

Per giunta dimostrare che $\mathcal{H}_2$ ed $\mathcal{H}_4$ sono delle basi ortogonali, dette di *J. S. Hadamard*