Def: sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V e sia $S \subseteq \mathbb{A}$ un sottospazio affine di giacitura W; diciamo che la **dimensione** di S è definita come la dimensione di W, ovvero $\dim S := \dim W$.

Prop.: sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su W e sia $S \subseteq \mathbb{A}$ un sottospazio affine di giacitura W e passante per Q; allora:

1. $Q \in S$
2. per ogni $P_1, P_2 \in S$, vale che $\overrightarrow{P_1P_2} \in W$
3. per ogni $R \in S$, vale che S è il sottospazio affine di giacitura W e passante per R

Dim.: 1. $Q \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{QQ} \in W \Leftrightarrow 0 \in W$, e questo è vero perché W è un sottospazio vettoriale

2. siano $P_1, P_2 \in S$, dobbiamo mostrare che $\overrightarrow{P_1P_2} \in W$; per definizione $P_1 \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{QP_1} \in W$

$$P_2 \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{QP_2} \in W$$

allora

$$\overrightarrow{P_1P_2} \overset{SA2}{=} \overrightarrow{P_1Q} + \overrightarrow{QP_2} = -\underset{\underset{W}{\cap}}{\overrightarrow{QP_1}} + \underset{\underset{W}{\cap}}{\overrightarrow{QP_2}}$$

pertanto $\overrightarrow{P_1P_2} \in W$.

3. per definizione abbiamo

$$S = \{P \in \mathbb{A} : \overrightarrow{QP} \in W\}$$

dobbiamo mostrare che

$$S = \{P \in \mathbb{A} : \overrightarrow{RP} \in W\}$$

"$\subseteq$" sia $P \in S$, allora $\overrightarrow{QP} \in W$, allora

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\underset{\underset{W}{\cap}}{\overrightarrow{QR}} + \underset{\underset{W}{\cap}}{\overrightarrow{QP}}$$

(perché $R \in S$)

quindi $\overrightarrow{RP} \in W$, ovvero

$$P \in \{P' \in \mathbb{A} : \overrightarrow{RP'} \in W\}$$

"$\supseteq$" sia $P \in \{P' \in \mathbb{A} : \overrightarrow{RP'} \in W\}$, allora $\overrightarrow{RP} \in W$

allora

$$\overrightarrow{QP} = \underset{\underset{W}{\cap}}{\overrightarrow{QR}} + \underset{\underset{W}{\cap}}{\overrightarrow{RP}}, \text{ pertanto } \overrightarrow{QP} \in W$$

(perché $R \in S$ ovvero $P \in S$.

Def: sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V, sia $S \subseteq \mathbb{A}$ un sottospazio affine e supponiamo che $\dim \mathbb{A} = n$ e $\dim S = n-1$; allora S si dice <u>iperpiano</u>)

(quindi i punti sono gli iperpiani di $\mathbb{A}^1_K$, le rette sono gli iperpiani del $\mathbb{A}^2_K$ e i piani sono gli iperpiani di $\mathbb{A}^3_K$)

Teorema: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $b \in K^m$; supponiamo che il sistema lineare $AX = b$ sia compatibile e sia S l'insieme delle sue soluzioni; allora $S \subseteq \mathbb{A}^n_K$ è un sottospazio affine la cui giacitura W è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo ~~associato~~ $AX = 0$; inoltre vale che

$$\dim S = n - \operatorname{rg} A$$

Dim: il teorema segue direttamente dal teorema di struttura per sistemi lineari arbitrari: infatti, tutte e sole le soluzioni di $AX = b$ sono della forma $s = \tilde{s} + s_0$, dove $\tilde{s}$ è una soluzione fissata di $AX = b$ ed s_0 è una soluzione di $AX = 0$; pertanto, se interpretiamo $\tilde{s} \in K^n$ come un punto $Q \in \mathbb{A}^n_K$ e se pensiamo a una soluzione s di $AX = b$ come a un punto $P \in \mathbb{A}^n_K$, allora $\overrightarrow{PQ} = \tilde{s} - s = -s_0$ e quest'ultima è una soluzione di $AX = 0$, ovvero è un elemento del sottospazio vettoriale W; pertanto l'insieme S delle soluzioni di $AX = b$ è il sottospazio affine passante per Q e di giacitura W; inoltre sappiamo che $\dim W = n - \operatorname{rg} A$ e quindi $\dim S = n - \operatorname{rg} A$.

Notazione: nella situazione precedente le equazioni $AX = b$ si dicono <u>equazioni cartesiane</u> per S.

Oss.: se un sistema lineare $AX = b$ ha come insieme delle soluzioni S, allora ogni sistema a esso equivalente ha il medesimo insieme delle soluzioni, quindi otteniamo equazioni cartesiane per S.

Esempio: consideriamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 6x_1 - 4x_2 = 2 \end{cases}$$

consideriamo la matrice completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{array}\right) \underset{II-2I}{\overset{OE}{\leadsto}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

quindi $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = 1$, pertanto il sistema è compatibile (teorema di Rouché-Capelli) e dunque il suo insieme delle soluzioni è un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^2_K$ di dimensione $2 - \operatorname{rg} A = 2 - 1 = 1$ (quindi esso è una retta affine); sue equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 6x_1 - 4x_2 = 2 \end{cases} \quad \text{ma anche} \quad 3x_1 - 2x_2 = 1$$

cerchiamo un altro modo di esprimere S: una soluzione particolare del sistema $AX = b$ è

$$\tilde{s} = (0, -1/2)$$

calcoliamo tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo ~~associato~~:

$$\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 3x_1 - 2x_2 = 0\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} t \\ 3/2 \cdot t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

pertanto la generica soluzione di $AX = b$ è della forma:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

ovvero, se pensiamo alle soluzioni di $AX = b$ come a punti di $\mathbb{A}^2_K$, allora esse sono i punti $P = (x, y)$ tali per cui

$$\begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - (-1/2) \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 1/2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{per qualche } t \in \mathbb{R}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = -1/2 + 3t \end{cases} \quad \text{per qualche } t \in \mathbb{R}$$

(queste ultime si dicono le equazioni parametriche di S).

essenzialmente passare dalle equazioni cartesiane alle equazioni parametriche consiste nel risolvere un sistema lineare e scrivere le sue soluzioni in dipendenza dei parametri liberi.