Sia $S \subseteq \mathbb{A}^n_K$ un sottospazio affine passante per $Q \in \mathbb{A}^n_K$ e di giacitura $W \subseteq K^n$. Supponiamo che $W = \mathrm{span}(w_1, \dots, w_k)$ e $w_1 \dots w_k$ sono linearmente indipendenti, ovvero essi sono una base di W. Allora possiamo scrivere

$$w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix} \quad \dots \quad w_k = \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix} \qquad w_{ij} \in K$$

Allora, se $Q = (q_1 \dots q_n)$, per definizione i punti $P = (x_1 \dots x_n)$ di S sono tutti e soli i punti tali che $\overrightarrow{QP} \in W$. Riscriviamo questa condizione:

$$\overrightarrow{QP} \in W \iff \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \in W \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = t_1 w_1 + \dots + t_k w_k \quad \text{per certi } t_1, \dots, t_k \in K$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix} + \dots + t_k \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + \dots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + \dots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

Queste ultime si dicono equazioni parametriche per il sottospazio affine S.
Abbiamo visto che, per passare da equazione cartesiane a equazioni parametriche per un sottospazio affine, quello che facciamo è andare a determinare la generica soluzione del sistema lineare determinato dalle equazioni cartesiane.
Ci chiediamo ora: date delle equazioni parametriche come determinare equazioni cartesiane per un sottospazio affine? Supponiamo di avere date equazioni parametriche per un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n_K$:

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + \dots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + \dots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

(e supponiamo che $w_1 \dots, w_k$ siano una base della giacitura W di S).
Pertanto, un punto $P = (x_1, \dots, x_n)$ appartiene a S se e solo se $\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \dots, w_k = \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix}$, ovvero se e solo se i vettori $\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix}, w_1, \dots w_k$ sono linearmente dipendenti. Ora per ipotesi $\dim W = k$ perché $w_1 \dots w_k$ sono una base, quindi

$$rg \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & & w_{nk} \end{pmatrix} = k$$

e dunque $P \in S$ se e solo se

$$rg \underbrace{\begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1k} & x_1 - q_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{nk} & x_n - q_n \end{pmatrix}}_{(*)} = k$$

Infatti:

$$\left.\begin{array}{l} w_1 \dots, w_k \text{ sono una base} \Rightarrow rg(*) \geq k \\ w_1, \dots, w_k, \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \text{ sono lin. dip} \Rightarrow rg(*) \leq k \end{array}\right\} \Rightarrow rg(*) = k$$

Abbiamo ottenuto una matrice $n \times (k+1)$ e vogliamo che il suo rango sia k.
Per comprendere quali condizioni implichi questo vincolo sul rango, utilizziamo su tale matrice l'algoritmo di gradinizzazione di Gauss, ottenendo

$$\begin{array}{c} \\ k \left\{ \right. \\ n-k \left\{ \right. \end{array} \begin{pmatrix} \overbrace{\ \times\ }^{k} & \overbrace{*}^{1} \\ 0 & \boxed{\ } \end{pmatrix}$$

$n-k$ espressioni in $x_1 \dots x_n$ di grado 1
se vogliamo che la matrice complessivamente abbia rango k allora deve essere che tutte queste $n-k$ espressioni si annullino; in questo modo otteniamo equazioni cartesiane per S.

Esempio: Consideriamo in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ il sottospazio S di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2+t \end{cases} \iff \begin{cases} x - 0 = t \\ y - 2 = t \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(quindi S passa per $(0,2)$ e ha giacitura $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$)

per ottenere equazioni cartesiane consideriamo

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[II - I]{} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -x+y-2 \end{pmatrix}$$

notiamo che $\dim S = \dim(\text{giacitura di } S)$

$$= \dim \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

concludiamo dunque $n - k = 2 - 1 = 1$ equazioni cartesiane che sono quindi date da:

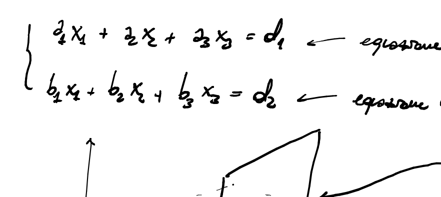
$$-x + y - 2 = 0$$

Oss: da quanto visto, un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n_K$ di dimensione k è determinato da $n-k$ equazioni cartesiane, quindi:

* una retta nel piano è determinata da 1 equazione cartesiana
* un piano nello spazio (a tre dimensioni) è determinato da 1 equazione cartesiana.
* una retta nello spazio è determinata da 2 equazioni cartesiane

Oss: se $S \subseteq \mathbb{A}^3_K$ è una retta, allora essa è determinata da due equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = d_1 & \leftarrow \text{equazione di un piano} \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = d_2 & \leftarrow \text{equazione di un piano} \end{cases}$$



ritroviamo che una retta nello spazio è data come intersezione di due piani.

Concludiamo ricordando che:

* le equazioni parametriche sono utili per fornire punti del sottospazio affine
* le equazioni cartesiane sono utili per verificare se un punto appartenga al sottospazio affine.

Geometria affine del piano.

Ci concentriamo su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Vale che $\dim \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \dim \mathbb{R}^2 = 2$
Sia $S \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ un sottospazio affine. Ci sono tre possibilità:

- $\dim S = 0$, allora S è un punto di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$
- $\dim S = 1$, allora S è una retta di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$
- $\dim S = 2$, allora $S = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

Ci focalizziamo sul caso in cui S sia una retta, ovvero abbia dimensione 1.
Dato che S è un sottospazio affine esso è determinato da un punto Q e dalla sua giacitura W. Scriviamo $Q = (q_1, q_2)$. Per costruzione $\dim W = 1$, pertanto $W = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}\right)$ con $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Abbiamo pertanto equazioni parametriche per S:

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + l \cdot t \\ x_2 = q_2 + m \cdot t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Se vogliamo ottenere equazioni cartesiane, consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} l & x_1 - q_1 \\ m & x_2 - q_2 \end{pmatrix}$$

e dobbiamo imporre che essa abbia rango 1. Questa matrice non è la matrice nulla, dato che $l \neq 0$ o $m \neq 0$ per ipotesi, quindi essa può avere rango 1 o 2; la matrice avrebbe rango 2 se e solo se fosse invertibile, quindi ha rango 1 se e solo se il suo determinante è nullo:

$$l \cdot (x_2 - q_2) - m(x_1 - q_1) = 0$$

Se scriviamo $x_1 = x$ e $x_2 = y$ e supponiamo che $l \neq 0$, allora questa equazione è equivalente a

$$y = q_2 + \frac{m}{l}(x - q_1)$$

Ritroviamo la "classica equazione di una retta non verticale".
Dalla geometria elementare sappiamo che per due punti distinti del piano passa una e una sola retta. Cerchiamo di determinarla. Siano $Q, R \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$:

$$Q = (q_1, q_2) \qquad R = (r_1, r_2)$$

Vale che se $Q, R \in S$ dove $S \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ è una retta di giacitura W, allora $\overrightarrow{QR} \in W$. Se $Q \neq R$, allora $\overrightarrow{QR} \neq 0$ e vale che

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} r_1 - q_1 \\ r_2 - q_2 \end{pmatrix}$$

Pertanto tale vettore è un vettore non nullo di W, che ha dimensione 1, quindi

$$W = \mathrm{span}(\overrightarrow{QR})$$

Pertanto conosciamo equazioni parametriche della retta:

$$\begin{cases} x = q_1 + (r_1 - q_1) \cdot t \\ y = q_2 + (r_2 - q_2) \cdot t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Similmente, sappiamo che se $P = (x, y)$, allora

$$P \in S \iff \overrightarrow{QP} \in W = \mathrm{span}(\overrightarrow{QR})$$

$$\iff \begin{pmatrix} x - q_1 \\ y - q_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} r_1 - q_1 \\ r_2 - q_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\iff \begin{pmatrix} x - q_1 \\ y - q_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1 - q_1 \\ r_2 - q_2 \end{pmatrix} \text{ sono linearmente dipendenti}$$

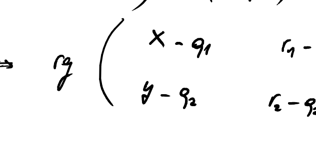
$$\iff rg \begin{pmatrix} x - q_1 & r_1 - q_1 \\ y - q_2 & r_2 - q_2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\iff (r_2 - q_2)(x - q_1) - (r_1 - q_1)(y - q_2) = 0$$

Anche qui, vediamo che se $r_1 \neq q_1$, ovvero se la retta non è verticale possiamo scrivere

$$y = q_2 + \left(\frac{r_2 - q_2}{r_1 - q_1}\right)(x - q_1)$$

In generale abbiamo



retta passante per Q e per R

Dalla geometria elementare sappiamo che due rette nel piano ~~possono~~ essere:

- parallele (e, come caso particolare coincidenti) $\iff$ tutti o nessun punto in comune.
- incidenti (in un unico punto).

Prop: siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ due rette affini, allora:

$$\begin{array}{l} S_1 \text{ ed } S_2 \text{ hanno tutti} \\ \text{o nessun punto in comune} \end{array} \iff \text{giacitura}(S_1) = \text{giacitura}(S_2)$$

Prop: siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ due rette affini, allora:

$$\begin{array}{l} S_1 \text{ ed } S_2 \text{ hanno un unico} \\ \text{punto di intersezione} \end{array} \iff \text{giacitura}(S_1) \neq \text{giacitura}(S_2)$$

Posizione reciproca tra sottospazi affini:

Introduciamo un linguaggio che generalizzi quanto abbiamo visto nel caso di rette parallele nel piano. Ci accorgiamo subito, per questioni dimensionali, che non possiamo dire che due sottospazi affini sono paralleli se e solo se le loro giaciture sono uguali. Ci serve una condizione più debole.

Def: siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ due sottospazi affini di giacitura, rispettivamente W_1 e W_2; allora S_1 ed S_2 si dicono:

i. incidenti se $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$
(e coincidenti se $S_1 = S_2$)

ii. paralleli (e scriviamo $S_1 \mathbin{/\mkern-5mu/} S_2$) se
$W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_1 \supseteq W_2$

iii. sghembi se non sono né paralleli né incidenti.

Oss: nel piano, due rette non possono mai essere sghembe.