Geometria affine dello spazio

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ un sottospazio affine. Allora

$$\dim S \begin{cases} 0 \Rightarrow S \text{ è un punto} \\ 1 \Rightarrow S \text{ è una retta} \\ 2 \Rightarrow S \text{ è un piano} \\ 3 \Rightarrow S = \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

Cominciamo a considerare il caso $\dim S = 1$. Se W è la giacitura di S, allora $\dim W = 1$, quindi $W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}\right)$ con $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Se $Q \in S$, con $Q = (q_1, q_2, q_3)$, allora S ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = q_1 + t \cdot l \\ y = q_2 + t \cdot m \\ z = q_3 + t \cdot n \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

(infatti se $P = (x, y, z)$ è un generico punto di S, allora deve essere $\overrightarrow{QP} \in W$, ovvero $\begin{pmatrix} x - q_1 \\ y - q_2 \\ z - q_3 \end{pmatrix} \in \text{span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}\right)$)

Per trovare equazioni cartesiane della retta S, consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} l & x - q_1 \\ m & y - q_2 \\ n & z - q_3 \end{pmatrix}$$

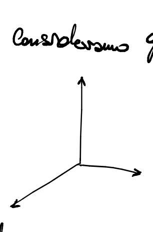
e imponiamo che essa abbia rango 1.

Per farlo, portiamo la matrice a scala tramite l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \boxed{*} \\ 0 & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

imponiamo che queste due entrate (che dipendono da x, y, z) siano nulle.

Esempio: Consideriamo gli assi coordinati:



consideriamo la retta passante per il punto $O = (0,0,0)$ e parallela a $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

le equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t = t \\ y = 0 + 0 \cdot t = 0 \\ z = 0 + 0 \cdot t = 0 \end{cases}$$

per ottenere equazioni cartesiane, consideriamo

$$\begin{pmatrix} 1 & x - 0 \\ 0 & y - 0 \\ 0 & z - 0 \end{pmatrix}$$

questa matrice è già a gradini; affinché abbia rango 1 dobbiamo imporre

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \leftarrow$$

queste sono equazioni cartesiane per la retta che stiamo considerando.

Anche in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, per due punti distinti passa un'unica retta. Supponiamo quindi di avere $Q, R \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, $Q \neq R$, ovvero

$$Q = (q_1, q_2, q_3) \qquad R = (r_1, r_2, r_3)$$

Come fatto per il piano, notiamo che la giacitura della retta passante per Q ed R ha dimensione 1; d'altro canto, $\overrightarrow{QR}$ deve appartenere a tale giacitura e per ipotesi esso è non nullo; quindi la giacitura di tale retta è

$$\text{span}\left(\overrightarrow{QR}\right)$$

Pertanto, equazioni parametriche per tale retta sono:

$$\begin{cases} x = q_1 + t(r_1 - q_1) \\ y = q_2 + t(r_2 - q_2) \\ z = q_3 + t(r_3 - q_3) \end{cases}$$

Se vogliamo equazioni cartesiane, ragioniamo come prima.

Se invece partiamo da equazioni cartesiane di una retta in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

allora, per ottenere equazioni parametriche per tale retta andiamo a determinare la generica soluzione di tale sistema.

Esempio: consideriamo la retta in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

per trovare equazioni parametriche della retta risolviamo il sistema lineare:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

applichiamo l'algoritmo di Gauss e otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -3y + 3z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2\left(z + \frac{1}{3}\right) - z = 4 \\ y = \frac{1}{3} + z \end{cases} \qquad \begin{cases} x + z + \frac{2}{3} = 4 \\ y = z + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -z + \frac{10}{3} \\ y = z + \frac{1}{3} \end{cases}$$

una soluzione particolare è $\left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

il sistema lineare omogeneo associato è equivalente a

$$\begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

quindi la sua generica soluzione è

$$\begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi la generica soluzione del sistema lineare è

$$\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e pertanto equazioni parametriche per la retta data sono:

$$\begin{cases} x = \frac{10}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

In aggiunta alle rette, in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ possiamo considerare i piani. Un piano è un sottospazio affine di dimensione 2, pertanto esso è determinato da un punto $Q \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ e da una giacitura $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di dimensione 2:

$$Q = (q_1, q_2, q_3) \quad \text{e} \quad W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}\right)$$

con $\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$ linearmente indipendenti, ovvero tali che

$$\text{rg}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} = 2$$

Da questa osservazione otteniamo equazioni parametriche per il piano: se $P = (x, y, z)$, allora P appartiene al piano se e solo se $\overrightarrow{QP} \in W \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{QP} = \text{span}\left(\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}\right)$$

$\Leftrightarrow$ esistono $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\overrightarrow{QP} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - q_1 \\ y - q_2 \\ z - q_3 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

per certi $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

Pertanto le equazioni parametriche di tale piano sono:

$$\begin{cases} x = q_1 + l_1 \cdot t_1 + l_2 \cdot t_2 \\ y = q_2 + m_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2 \\ z = q_3 + n_1 \cdot t_1 + n_2 \cdot t_2 \end{cases}$$

Se dalle equazioni parametriche vogliamo ottenere equazioni cartesiane, consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x - q_1 \\ m_1 & m_2 & y - q_2 \\ n_1 & n_2 & z - q_3 \end{pmatrix}$$

e imponiamo che essa abbia rango 2. Abbiamo due modi per farlo:

(i) Come per le rette, gradinizziamo la matrice e imponiamo che l'entrata in basso a destra (che sarà un'espressione in x, y, z) sia uguale a zero:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

imponiamo che questa espressione sia uguale a zero

(ii) notiamo che la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2

pertanto la nostra matrice avrà rango almeno 2, quindi i possibili ranghi sono soltanto 2 e 3; pertanto la matrice avrà rango 2 se e solo se non avrà rango 3, ovvero se e solo se il suo determinante è nullo; pertanto, un'equazione cartesiana del piano sarà data da:

$$\det\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x - q_1 \\ m_1 & m_2 & y - q_2 \\ n_1 & n_2 & z - q_3 \end{pmatrix} = 0$$

In ciascuno dei due casi otteniamo un'equazione di primo grado in x, y, z.

Esempio: calcoliamo un'equazione cartesiana del piano $S \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per $Q = (1, -1, 0)$ e parallelo al sottospazio vettoriale

$$W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(notiamo che i due vettori che generano W sono linearmente indipendenti, e dunque una base di W, perché non sono l'uno un multiplo dell'altro); calcoliamo

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & x - 1 \\ 1 & 1 & y + 1 \\ -1 & 1 & z - 0 \end{pmatrix} = 2\left(z - (y+1)\right) - \left(z - (x-1)\right) - \left((y+1) - (x-1)\right)$$

$$= 2z - 2y - 2 - z + x - 1 - y - 1 + x - 1$$

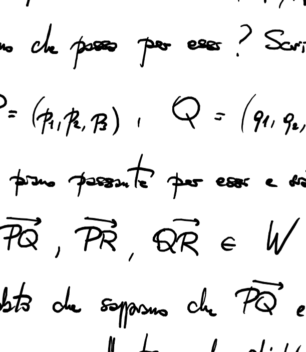
$$= 2x - 3y + z - 5$$

pertanto un'equazione cartesiana del piano è

$$2x - 3y + z - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + z = 5$$

Come per due punti distinti passa una e una sola retta, per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.

Per cominciare, cerchiamo di capire quando tre punti non sono allineati:



Vi sono vari modi per capire se P, Q, R sono o meno allineati

(i) possiamo calcolare le rette per (P e Q) e per (P ed R) e verificare che siano rette distinte o meno

(ii) possiamo calcolare la retta per P e Q e verificare se R vi appartenga o meno.

(iii) notiamo che P, Q, R sono allineati se e solo se

$$\overrightarrow{PQ} \text{ e } \overrightarrow{PR} \text{ sono linearmente dipendenti (ovvero proporzionali)}$$

Supponiamo dunque che siano dati $P, Q, R \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ non allineati. Come calcoliamo l'unico piano che passa per essi? Scriviamo

$$P = (p_1, p_2, p_3), \quad Q = (q_1, q_2, q_3), \quad R = (r_1, r_2, r_3)$$

Sia H il piano passante per essi e sia W la sua giacitura. Allora

$$\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QR} \in W$$

Pertanto, dato che sappiamo che $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ sono linearmente indipendenti (dato che i punti non sono allineati) e che $\dim W = 2$, allora

$$W = \text{span}\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right)$$

Quindi H è il piano passante per P (oppure Q oppure R) e di giacitura $\text{span}(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$. Pertanto possiamo scrivere equazioni parametriche di H:

$$\begin{cases} x = p_1 + t_1(q_1 - p_1) + t_2 \cdot (r_1 - p_1) \\ y = p_2 + t_1(q_2 - p_2) + t_2 \cdot (r_2 - p_2) \\ z = p_3 + t_1(q_3 - p_3) + t_2 \cdot (r_3 - p_3) \end{cases}$$

Se $(x, y, z) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, allora $(x, y, z) \in H$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \\ z - p_3 \end{pmatrix} \in \text{span}\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 & x - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 & y - p_2 \\ q_3 - p_3 & r_3 - p_3 & z - p_3 \end{pmatrix} \text{ ha rango 2}$$

$$\Leftrightarrow \det(\text{precedente matrice}) = 0.$$

Andiamo a discutere le possibili posizioni reciproche tra un piano e una retta di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Se $L \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ è una retta di giacitura W e $H \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ è un piano di giacitura Y, allora L ed H sono paralleli se e solo se vale che $W \subseteq Y$. In altre parole, se

$$W = \text{span}(u) \quad \text{e} \quad Y = \text{span}(v_1, v_2)$$

allora

$$\begin{aligned} L \text{ è parallelo ad } H &\Leftrightarrow W \subseteq Y \\ &\Leftrightarrow \text{span}(u) \subseteq \text{span}(v_1, v_2) \\ &\Leftrightarrow u \in \text{span}(v_1, v_2) \\ &\Leftrightarrow u \text{ è combinazione lineare di } v_1, v_2 \end{aligned}$$

Esempio: sia H il piano in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per $Q = (1, 0, -2)$ e parallelo a $W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$; se vogliamo determinare una retta $L \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ parallela ad H e passante per $Q' = (-1, 0, 2)$ allora è sufficiente scegliere un vettore non nullo $u \in W$, come ad esempio $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e prendere L come la retta passante per Q' e parallela alla giacitura $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Se un piano $H \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ e una retta $L \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ non sono paralleli, allora è possibile mostrare che (attraverso l'uso del teorema di Cramer) che L ed H si intersecano in un unico punto. Per calcolare tale punto, se abbiamo equazioni cartesiane di H ed L:

$$H: \quad ax + by + cz = d$$

$$L: \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \end{cases}$$

allora è sufficiente andare a risolvere il sistema lineare determinato da tutte e tre le equazioni, e la sua soluzione sarà il punto $L \cap H$.

Se invece abbiamo dato H in forma cartesiana ed L in forma parametrica:

$$H: \quad ax + by + cz = d$$

$$L: \begin{cases} x = p_1 + l \cdot t \\ y = p_2 + m \cdot t \\ z = p_3 + n \cdot t \end{cases}$$

allora potremo calcolare l'intersezione $L \cap H$ sostituendo nell'equazione di H la parametrizzazione di L, e risolvendo rispetto al parametro t.