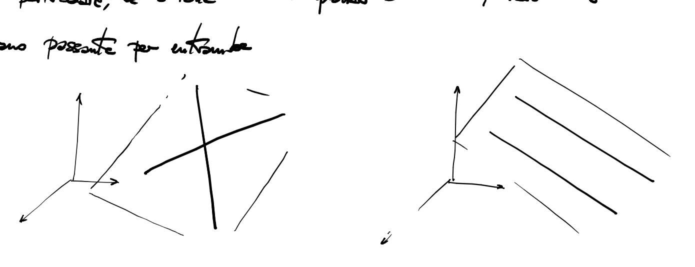
Complanarità

<u>Def</u>: due rette $r, s \subseteq A^3_{\mathbb{R}}$ si dicono <u>complanari</u> se esiste un piano $\pi \subseteq A^3_{\mathbb{R}}$ che le contenga entrambe, ovvero $r \subseteq \pi$ ed $s \subseteq \pi$.

<u>Oss</u>: due rette $r, s \subseteq A^3_{\mathbb{R}}$ sono complanari se e solo se:
- sono incidenti, oppure
- sono parallele

in particolare, se le rette sono complanari e distinte, allora esiste un unico piano passante per entrambe

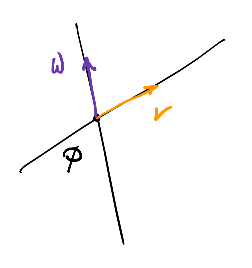


<u>Domanda</u>: date due rette complanari, come determinare il piano che le contiene?

Supponiamo che due rette r ed s siano incidenti, e siano

r: retta passante per Q e di giacitura $span(v)$
s: retta passante per Q' e di giacitura $span(w)$.

Notiamo che, se $r \neq s$, allora $r \cap s = \{P\}$ e possiamo scegliere entrambi Q e Q' uguali a P. Se $r \neq s$, allora v e w sono linearmente indipendenti dato che, se $r \neq s$ ed r ed s sono incidenti, allora esse non sono parallele.



Se π è il piano che contiene r ed s, allora sicuramente $P \in \pi$. Inoltre se W è la giacitura di π, allora

$span(v) \subseteq W$ e $span(w) \subseteq W$

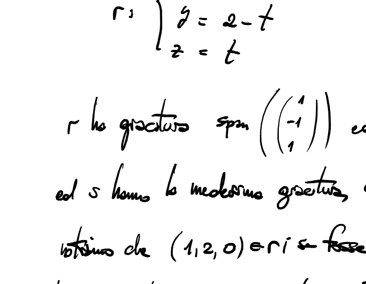
quindi $v, w \in W$, ma allora dato che v e w sono linearmente indipendenti, allora $\dim span(v, w) = 2$ e $span(v, w) \subseteq W$ e $\dim W = 2$, pertanto

$$W = span(v, w)$$

Pertanto π è il piano passante per P e di giacitura $span(v, w)$.

Se invece r ed s sono parallele:

r: retta passante per Q e di giacitura $span(v)$
s: retta passante per Q' e di giacitura $span(v)$



Se $r \neq s$, esiste un unico piano π che le contiene entrambe. Se W è la giacitura di π, allora $v \in W$, ma anche $\overrightarrow{QQ'} \in W$ e se $r \neq s$, allora v e $\overrightarrow{QQ'}$ sono linearmente indipendenti, dunque $W = span(v, \overrightarrow{QQ'})$

Pertanto, il piano π è il piano passante per Q (o Q') e di giacitura $span(v, \overrightarrow{QQ'})$.

<u>Esempio</u>: consideriamo le due rette in forma parametrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2\tau \\ y = 3 - 2\tau \\ z = 1 + 2\tau \end{cases}$$

r ha giacitura $span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ed s ha giacitura $span\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$; pertanto r ed s hanno la medesima giacitura, quindi sono parallele; potrebbe essere che $r = s$. Notiamo che $(1, 2, 0) \in r$; se fosse $r = s$, allora dovrebbe essere che $(1,2,0) \in s$, il che vorrebbe dire che esiste un $\bar{\tau} \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} 1 = 2\bar{\tau} & \Longrightarrow \bar{\tau} = 1/2 \\ 2 = 3 - 2\bar{\tau} \\ 0 = 1 + 2\bar{\tau} & \Longrightarrow \bar{\tau} = -1/2 \end{cases}$$

però non esiste un tale $\bar{\tau}$, ovvero le due rette sono distinte

quindi esiste un unico piano passante per r ed s, ed esso è quello passante per $(1,2,0)$ e di giacitura $span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-2 \\ 1-0 \end{pmatrix}\right)$

una sua equazione cartesiana è data da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ -1 & 1 & y-2 \\ 1 & 1 & z-0 \end{pmatrix} = 0$$

Abbiamo detto che due rette $r, s \subseteq A^3_{\mathbb{R}}$ sono <u>sghembe</u> se non sono incidenti né parallele. Ne segue che per tali due rette non passa nessun piano. È vero però che esistono due piani π_r e π_s, paralleli tra loro e uno contenente r ed uno contenente s. Se

$span(v)$ = giacitura di r
$span(w)$ = giacitura di s

allora la giacitura di ciascuno dei due piani sarà $span(v, w)$.

Prodotto scalare

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. In particolare scegliamo $V = \mathbb{R}^n$. Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

definiamo il <u>prodotto scalare</u> tra v e w come la quantità

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$$

(anche $\langle v, w \rangle$)

Abbiamo pertanto definito una funzione:

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v, w \longmapsto v \cdot w$$

Il prodotto scalare è bilineare:

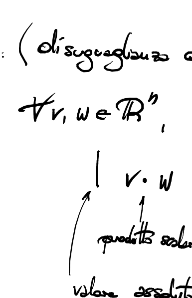
$\forall v, v' \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^n$: $(v + v') \cdot w = v \cdot w + v' \cdot w$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^n$: $\underbrace{(\lambda \cdot v)}_{\text{moltiplicazione per uno scalare}} \cdot w = \lambda \cdot \underbrace{(v \cdot w)}_{\text{prodotto scalare}}$

prodotto scalare   moltiplicazione in $\mathbb{R}$

(valgono analoghe proprietà scambiando v e w)

<u>Oss</u>. se $v \in \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, allora $v \cdot v = v_1^2 + v_2^2$



Per il teorema di Pitagora, $v \cdot v$ è il quadrato di quello che noi chiamiamo la <u>lunghezza</u> del vettore v.

<u>Def</u>: sia $v \in \mathbb{R}^n$, definiamo la <u>norma</u> di v come

$$\|v\| := \sqrt{v \cdot v}$$

Notiamo infatti che per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $v \cdot v \geq 0$, quindi la norma è ben definita.

<u>Def</u>: se $P, Q \in A^n_{\mathbb{R}}$, allora definiamo la <u>distanza</u> tra P e Q come

$$d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|$$

<u>Teorema</u>: (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

$\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, vale che

$$\underbrace{|\,v \cdot w\,|}_{\text{valore assoluto}} \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

prodotto scalare   moltiplicazione in $\mathbb{R}$.

<u>Cor</u>: se $v, w \in \mathbb{R}^n$, allora

$$-\|v\| \cdot \|w\| \leq v \cdot w \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

se inoltre $v \neq 0$ e $w \neq 0$, allora $\|v\| > 0$ e $\|w\| > 0$,
(infatti, se $v \neq 0$, allora $v \cdot v = v_1^2 + \ldots + v_n^2$ e questa quantità è > 0)
quindi possiamo dividere per $\|v\| \cdot \|w\|$ e ottenere

$$-1 \leq \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

pertanto la quantità $\frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$ è il coseno di un certo angolo α, con $\alpha \in [0, \pi]$; definiamo quindi l'<u>angolo</u> tra v e w come quel numero $\alpha \in [0, \pi]$ tale per cui

$$\cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Quindi, dato un prodotto scalare, è possibile definire:
- la norma dei vettori (e quindi la distanza tra i punti)
- l'angolo tra due vettori non nulli.

<u>Oss</u>. l'angolo tra v e w è di $\pi/2$ se e solo se:

$$\frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \iff v \cdot w = 0$$

<u>Def</u>: siano $v, w \in \mathbb{R}^n$, allora v e w si dicono <u>ortogonali</u> se $v \cdot w = 0$.

<u>Def</u>: sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{B}$ si dice <u>ortogonale</u> se gli elementi di $\mathcal{B}$ sono a due a due ortogonali tra di loro.

<u>Esempio</u>: consideriamo $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$; inoltre $\mathcal{B}$ è ortogonale infatti

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0.$$

<u>Def</u>: sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{B}$ si dice <u>ortonormale</u> se
i. $\mathcal{B}$ è ortogonale
ii. $\forall b \in \mathcal{B}$, vale che $\|b\| = 1$
(i vettori di norma 1 si dicono <u>versori</u>)

<u>Esempio</u>: la base standard $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale:

$$\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow (i)$$

vale che

$e_i \cdot e_j = 0$ se e solo se $i \neq j$
$e_i \cdot e_i = 1$

<u>Teorema</u>: (teorema spettrale per matrici simmetriche)

sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A sia simmetrica, ovvero ${}^tA = A$; allora esiste una base ortonormale di autovettori per

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$v \longmapsto Av$$

(in altri termini, l'applicazione lineare L_A si può diagonalizzare con una base $\mathcal{B}$ di autovettori che sia ortonormale, e dunque se

$$P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^n})$$

allora $P^{-1} \cdot A \cdot P$ è diagonale)

<u>Esercizio</u>: sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ e sia

$$B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^n})$$

calcolare ${}^tB \cdot B$.

<u>Def</u>: sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale. Definiamo l'<u>ortogonale</u> di W come

$$W^{\perp} = \{ v \in \mathbb{R}^n : v \cdot w = 0 \ \forall w \in W \}$$

<u>Esercizio</u>: dimostrare che $W^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale
(ciò segue dalle proprietà di bilinearità del prodotto scalare)

<u>Esempio</u>: consideriamo la seguente matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcoliamo il polinomio caratteristico di L_A

$$A - \lambda \cdot 1\!\!1_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot 1\!\!1_3) = (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(1+\lambda) \cdot \underbrace{\left[(2-\lambda)^2 - 9\right]}_{C^2 - D^2 = (C+D)(C-D)}$$

$$= -(\lambda+1) \cdot (2-\lambda+3)(2-\lambda-3)$$

$$= -(\lambda+1)(5-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$= -(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

pertanto spettro di L_A è $\{-1, 5\}$ e

$m_a(-1) = 2$
$m_a(5) = 1$

per calcolare una base di autovettori, considero

$$Aut(-1) \quad e \quad Aut(5)$$

- $Aut(-1) = \ker(\text{applicazione lineare associata a } A + 1\!\!1_3)$

$$= \ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dobbiamo quindi risolvere

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero $x - z = 0$, dunque

$$Aut(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

questi due vettori sono ortogonali!

pertanto $m_g(-1) = 2$.