

ESERCIZI SU GEOMETRIA DELLO SPAZIO
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2024/25

Esercizio 1

Dati i seguenti punti Q e le seguenti equazioni cartesiane di piani π in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, **determina** un'equazione cartesiana del piano passante per Q e parallelo a π :

- (i) $Q = (1, 1, 0)$ e $\pi: 3x - 2y + z = 1$;
- (ii) $Q = (-1, 0, 2)$ e $\pi: x + 4y + 2z = -2$;
- (iii) $Q = (0, 0, 0)$ e $\pi: 2x - 7y + 3z = 0$.

Risoluzione.

- (i) Un primo modo per risolvere questo esercizio è notare che tutti e soli i piani paralleli al piano π di equazione cartesiana $3x - 2y + z = 1$ hanno equazione cartesiana della forma $3x - 2y + z = d$ per un qualche $d \in \mathbb{R}$. Affinché il piano di equazione $3x - 2y + z = d$ passi per $Q = (1, 1, 0)$ deve essere che

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 0 = d$$

ovvero $d = 1$. Pertanto il piano cercato è quello di equazione cartesiana $3x - 2y + z = 1$. Notiamo che tale piano coincide con quello di partenza, e questo vale perché $Q \in \pi$.

Un secondo modo per risolvere questo esercizio è cominciare determinando la giacitura di π . Per farlo, calcoliamo una base del sottospazio vettoriale W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato all'equazione cartesiana di π , ovvero

$$3x - 2y + z = 0.$$

Effettuando i calcoli, si trova che una base di W è data ad esempio da $\{v_1, v_2\}$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, il piano cercato è quello passante per Q e di giacitura W , che ha quindi equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = 1 + t_2 \\ z = -3t_1 + 2t_2 \end{cases}$$

Esercizio 2

Due rette r ed s di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si dicono *complanari* se esiste un piano π di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ che le contiene entrambe, ovvero se $r \subseteq \pi$ e $s \subseteq \pi$.

In ciascuno dei seguenti casi, **determina** se le rette r ed s siano o meno complanari.

(i)

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 8 - t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 - \tau \\ y = 3 + \tau \\ z = 5\tau \end{cases}$$

(ii)

$$r: \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = \tau \\ y = \tau \\ z = \tau \end{cases}$$

(iii)

$$r: \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 - 2t \\ z = 8 - t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = \tau \\ y = -5 + \tau \\ z = 2 + \tau \end{cases}$$

Risoluzione.

- (i) Verifichiamo innanzitutto se r ed s abbiano o meno un punto in comune. Per farlo, verifichiamo se il sistema lineare in t e τ

$$\begin{cases} 1 + t = 1 - \tau \\ 2t = 3 + \tau \\ 8 - t = 5\tau \end{cases}$$

abbia o meno soluzioni. Il sistema può essere riscritto come

$$\begin{cases} t + \tau = 0 \\ 2t - \tau = 3 \\ -t + 5\tau = -8 \end{cases}$$

le cui matrice dei coefficienti e matrice completa sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -8 \end{array} \right)$$

Si può verificare che il rango di A è 2, mentre il rango di $(A|b)$ è 3, pertanto le due rette non sono incidenti. L'unico modo dunque in cui r ed s possano essere complanari è che siano parallele (e distinte). Questo sarebbe vero se le loro giaciture fossero uguali. Le loro giaciture sono generate, rispettivamente, dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Se le due giaciture fossero uguali, i due vettori precedenti sarebbero proporzionali, il che non è il caso. Pertanto le due rette non sono né incidenti, né parallele, e dunque sono sghembe.

Esercizio 3

Determina un'equazione cartesiana del piano in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ contenente la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

e parallelo alla retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Risoluzione. Determiniamo vettori v_1 e v_2 tali per cui le giaciture delle due rette siano $\text{span}(v_1)$ e $\text{span}(v_2)$. Se v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, allora la giacitura del piano cercato deve essere $\text{span}(v_1, v_2)$. Se v_1 e v_2 non fossero linearmente indipendenti, allora ci sarebbero due situazioni possibili: o le due rette sono coincidenti (in tal caso un qualsiasi piano passante per esse è una risposta appropriata), oppure le due rette sono parallele e distinte (in tal caso, preso Q un punto su una retta e Q' un punto sull'altra, avremmo che la giacitura cercata sarebbe $\text{span}(v_1, \vec{QQ'})$).

Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato al sistema delle equazioni cartesiane della prima retta troviamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mentre dalla parametrizzazione della seconda retta troviamo

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dato che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, allora la giacitura del piano cercato è $W = \text{span}(v_1, v_2)$. A questo punto, è sufficiente determinare un punto sulla prima retta, come ad esempio $Q = (1, 2, 0)$, per ottenere che il piano desiderato è quello passante per Q e di giacitura W . Una sua equazione cartesiana è quindi data da

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & x-1 \\ -3 & -2 & y-2 \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero

$$x + y = 3.$$

Esercizio 4

Per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$, **determina** equazioni parametriche e cartesiane della retta $r_a \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ passante per i punti $P = (1, 1, 1)$ e $Q = (2, 0, a)$.

Determina poi il valore di a tale per cui la retta r_a è parallela al piano π di equazione cartesiana $2x - y + 3z = 1$.

Risoluzione. Equazioni parametriche della retta r_a sono date da

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + (a - 1)t \end{cases}$$

Equazioni cartesiane sono ottenute considerando la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x - 1 \\ -1 & y - 1 \\ a - 1 & z - 1 \end{pmatrix}$$

ed effettuando la sua gradinizzazione, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & & x - 1 \\ 0 & & x + y - 2 \\ 0 & (1 - a)x + z + a - 2 & \end{pmatrix}$$

Equazioni cartesiane sono quindi

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (1 - a)x + z = -a + 2 \end{cases}$$

Ora, la giacitura del piano π è data da

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Vale che la retta r_a è parallela al piano π se e solo se

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a - 1 \end{pmatrix}\right) \subset \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Quest'ultima condizione è soddisfatta se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & a - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ciò equivale a

$$a = 0.$$

Per tale valore dunque la retta r_a è parallela a π .

Esercizio 5

Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ consideriamo, in dipendenza dal parametro $a \in \mathbb{R}$, i tre punti

$$P = (0, -1, 1), \quad Q = (0, 1, 1), \quad R_a = (a, 0, 0).$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, **determina** il piano $\pi_a \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ passante per P , Q e R_a .

A questo punto, **decidi** se esistano valori di a tali per cui il piano π_a sia parallelo alla retta $r \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ di equazioni cartesiane

$$r: \begin{cases} y = 3 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Risoluzione. Un'equazione cartesiana del piano π_a per P , Q ed R_a è data da

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a & x - a \\ -1 & -1 & y \\ 0 & -1 & z \end{pmatrix} = 0$$

(dove le prime due colonne sono i vettori $\frac{1}{2}\vec{QP}$ e $R_a\vec{Q}$), ovvero

$$x + az = a.$$

La giacitura del piano π_a è data da

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

La giacitura della retta r è data da

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Il piano π_a è parallelo alla retta r se e solo se

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \subset \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

e quest'ultima condizione è soddisfatta se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

L'ultima condizione si riscrive come

$$-1 + a = 0$$

il che mostra che solo e soltanto per $a = 1$ il piano π_a è parallelo a r .

Esercizio 6

Nello spazio $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, consideriamo in dipendenza del parametro $a \in \mathbb{R}$ le rette

$$r: \begin{cases} x + 2y = a \\ z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Decidi se esistano valori di a tale per cui r ed s sono complanari. In tal caso, **decidi** se per tali valori le rette siano incidenti o meno.

Risoluzione. Calcoliamo innanzitutto le giaciture delle due rette. Esse sono ottenute risolvendo i sistemi lineari omogenei associati alle equazioni cartesiane delle due rette. Abbiamo quindi che la giacitura W_r di r è

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

mentre la giacitura W_s di s è

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

Dato che le giaciture sono distinte (i vettori che generano le giaciture non sono proporzionali), le due rette non sono mai parallele, indipendentemente dal valore di a . Pertanto, le rette r ed s sono complanari se e solo se sono incidenti. Ora, quest'ultima condizione è verificata se e solo se il sistema lineare ottenuto giustapponendo le equazioni cartesiane delle rette

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ z = 0 \\ x - y = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

è compatibile. Effettuando la gradinizzazione della matrice completa di questo sistema abbiamo che esso è equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ y = \frac{1}{2}a \\ z = 0 \\ 0 = 1 + \frac{1}{2}a \end{cases}$$

Il precedente sistema è compatibile se e solo se $1 + \frac{1}{2}a = 0$, ovvero $a = -2$. Per tale valore, dunque, le due rette sono complanari e incidenti.

Esercizio 7

Nello spazio $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, consideriamo i punti

$$P = (1, 1, 0) \quad \text{e} \quad P' = (1, 2, 3)$$

e in \mathbb{R}^3 consideriamo i vettori

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sia $r \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ la retta passante per P e con giacitura $\text{span}(v)$ e sia $r' \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ la retta passante per P' e con giacitura $\text{span}(v')$.

Dimostra che r ed r' sono sghembe.

Determina due piani paralleli π e π' tali che $r \subseteq \pi$ ed $r' \subseteq \pi'$.

Risoluzione. Dal momento che i vettori v e v' non sono proporzionali, le due rette non possono essere parallele. Pertanto, per mostrare che r ed r' sono sghembe è sufficiente mostrare che non sono incidenti. Questo si traduce nel mostrare che il sistema lineare

$$\begin{cases} 1 + 2t = 1 + \tau \\ 1 - t = 2 + 3\tau \\ \sqrt{2}t = 3 + 2\tau \end{cases}$$

nelle variabili t e τ non ha soluzioni. Questo è effettivamente vero per il teorema di Rouché-Capelli, che si può applicare una volta scritto il sistema nella forma

$$\begin{cases} 2t - \tau = 0 \\ t + 3\tau = -1 \\ \sqrt{2}t - \tau = 3 \end{cases}$$

Pertanto le due rette sono sghembe.

Per trovare i due piani paralleli π e π' , notiamo che la loro giacitura comune deve essere necessariamente

$$W = \text{span}(v, v')$$

dal momento che π deve contenere r e π' deve contenere r' . Quindi π è il piano passante per P e di giacitura W , mentre π' è il piano passante per P' di giacitura W .