PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II

A.A. 2024/2025 - INGEGNERIA

SIMULAZIONE DEL 19.12.2024

1. Data la funzione
$$F(x,y) = (4x^3 - x)(y - 2y^2)\,,$$
disegnare l'insieme di livello
$$\Sigma_0 = \{(x,y) : F(x,y) = 0\}\,,$$
individuare l'insieme $\{(x,y) : F(x,y) > 0\}$, determinare tutti i punti stazionari di F e studiarne la natura.

2. Data la serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n+3} \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$
trovare l'insieme di convergenza puntuale, l'insieme di convergenza uniforme e la somma ove possibile.

3. Trovare l'area della superficie σ che ha come supporto la regione del piano di equazione $z = y$ delimitata dal paraboloide $z = x^2 + y^2$.

4. Sia ω la forma differenziale definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ da
$$\omega(x,y) = -\frac{y^3}{x^2 + y^6}dx + \frac{3xy^2}{x^2 + y^6}dy\,.$$
Dire se ω è chiusa e se ω è esatta, giustificando la risposta.

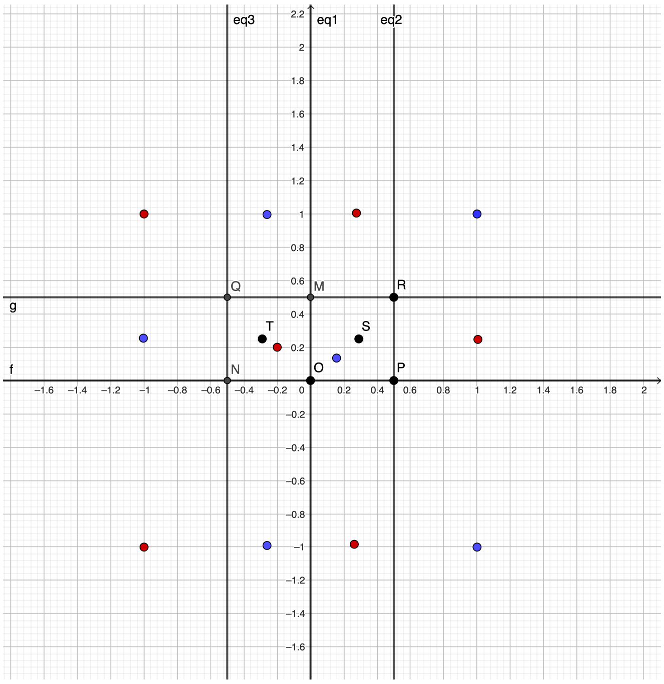


FIGURA 1. L'insieme Σ_0 è dato dalle rette evidenziate, i punti in rosso corrispondono a zone dove F è positiva, quelli in blu a zone dove F è negativa, i punti in nero sono i punti stazionari

SOLUZIONI

Esercizio 1. Osserviamo che

$$F(x,y) = (4x^3 - x)(y - 2y^2) = x(2x-1)(2x+1)y(1-2y)\,,$$

quindi $F(x,y) = 0$ se $x = 0$ o $x = \pm\frac{1}{2}$ o $y = 0$ o $y = \frac{1}{2}$. La funzione F ha segno costante in ciascuna delle zone del piano delimitate dalle rette che compongono Σ_0. L'insieme $\{(x,y) : F(x,y) > 0\}$ corrisponde alle zone dove si trovano i punti indicati in rosso nella figura. Infatti, osserviamo che $F(1,1) = 3(-2) < 0$ e nel passare da una zona all'altra la funzione cambia segno.

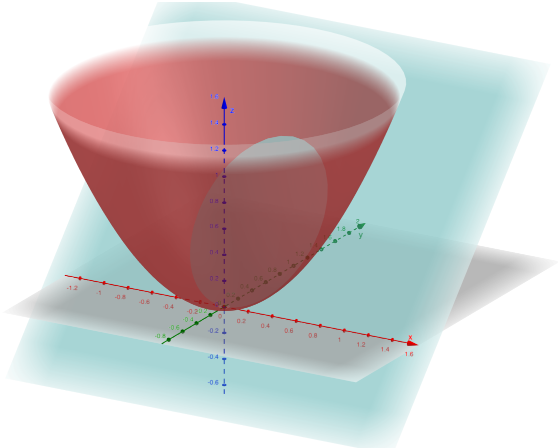
I punti stazionari sono i punti dove si annulla il gradiente. Si ha

$$\nabla F(x,y) = \big((12x^2 - 1)y(1-2y), x(4x^2-1)(1-4y)\big)\,.$$

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} (12x^2 - 1)y(1-2y) = 0 \\ x(4x^2-1)(1-4y) = 0\,. \end{cases}$$

Le soluzioni sono $(\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{4})$, $(0,0)$, $(0,\frac{1}{2})$, $(\pm\frac{1}{2},0)$, $(\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. I punti $(0,0)$, $(0,\frac{1}{2})$, $(\pm\frac{1}{2},0)$, $(\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ sono situati all'intersezione di due delle rette che compongono Σ_0 e in ciascun intorno di questi punti troviamo sia punti in cui F è positiva che punti dove F è negativa, per cui questi punti non sono punti di massimo o di minimo relativo per F (essi vengono chiamati punti di sella). I punti $(\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{4})$ si trovano all'interno delle zone limitate in cui F ha segno costante all'interno ed è nulla sul bordo. Di conseguenza $(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{4})$ è di minimo relativo mentre $(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{4})$ è di massimo relativo.



Esercizio 2. Possiamo scrivere la serie come:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n+3}=x^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}=x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\,.$$

Osserviamo che si tratta di una serie di potenze di centro $x_0=0$ e raggio di convergenza $R=1$ essendo $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}=1$. Quindi la serie data converge puntualmente in $(-1,1)$ e uniformemente in qualsiasi intervallo del tipo $[-r,r]$ con $0<r<1$. Osserviamo che la serie converge in $x=-1$ per il criterio di Leibniz, mentre non converge in $x=1$ per confronto asintotico con la serie armonica $\sum_n\frac{1}{n}$. Quindi la serie converge puntualmente in $[-1,1)$ e si può dimostrare che converge uniformemente in $[-1,r]$ per ogni $0<r<1$.
Per determinare la somma della serie osserviamo che $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ è una primitiva di x^n. Per il teorema di passaggio al limite sotto il segno dell'integrale applicato alla serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ la cui somma è uguale a $\frac{1}{1-x}$ troviamo che la somma della serie data è uguale a

$$x^3\int\frac{1}{1-x}dx=-x^3\ln(1-x)\,,\ \text{per}\ -1\le x<1\,.$$

Esercizio 3. Il supporto della superficie è il grafico della funzione $f(x,y)=y$ definita sul cerchio B che ha come frontiera la circonferenza di equazione $y=x^2+y^2$. Possiamo scrivere quindi $\sigma:B\to\mathbb{R}^3$, $\sigma(x,y)=(x,y,f(x,y))$. Abbiamo quindi

$$area(\sigma)=\int_B\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}dxdy=\sqrt{2}\,area(B)=\sqrt{2}\pi/4\,.$$

Esercizio 4. La forma differenziale ω è chiusa se $d\omega=0$. Basta quindi calcolare

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{y^3}{x^2+y^6}\Big)=-\frac{3y^2(x^2+y^6)-6y^3y^5}{(x^2+y^6)^2}=-\frac{3x^2y^2-3y^8}{(x^2+y^6)^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{3xy^2}{x^2+y^6}\Big)=\frac{3y^2(x^2+y^6)-6x^2y^2}{(x^2+y^6)^2}=\frac{-3x^2y^2+3y^8}{(x^2+y^6)^2}$$

e osservando che le due derivate sono uguali concludiamo che ω è chiusa.

Per stabilire se è esatta o no non si può applicare il teorema di Poincaré perché il dominio di definizione di ω, $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, non è stellato. Calcoliamo l'integrale di ω lungo un cammino che gira attorno a $(0,0)$, per esempio $x^2+y^6=1$ che possiamo scrivere come $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(\cos t,\sqrt[3]{\sin t})=(x(t),y(t))$. (Si osserva che γ è un incollamento di due curve regolari, una definita su $[0,\pi]$, l'altra su $[\pi,2\pi]$ con la stessa espressione.)

Otteniamo

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{y(t)^3}{x(t)^2+y(t)^6}\, x'(t) + \frac{3x(t)y(t)^2}{x(t)^2+y(t)^6}\, y'(t)\Big)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin t)(-\sin t) + 3\cos^2 t(\sin t)^{2/3}\frac{1}{3}(\sin t)^{-2/3}}{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = 2\pi \neq 0\,,\end{aligned}$$

per cui ω non è esatta.