MATEMATICA E STATISTICA 2024-25
ESERCIZI - FOGLIO 6

VALENTINA BEORCHIA

1. Progressioni aritmetiche

(1) Calcolare la ragione d di una progressione aritmetica $a_0, a_1, a_2, \cdots$, sapendo che:
   (a) $a_{14} = 21$ ed $a_0 = 4$;
   (b) $a_4 = 22$ ed $a_2 = 8$;
   (c) $a_5 = 42$ ed $a_0 = 32$;
   (d) $a_{14} = 63$ ed $a_0 = 7$.

(2) Si consideri una progressione aritmetica $a_0, a_1, a_2, \cdots$ di ragione d.
   (a) Dati $a_0 = \frac{3}{4}$ e $d = \frac{1}{4}$, calcolare a_{30}.
   (b) Trovare il sesto termine se $a_0 = 4$ e $d = \frac{1}{2}$.
   (c) Trovare il primo termine se $a_3 = \sqrt{3}$ e $d = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$.
   (d) Trovare il sesto termine se $a_0 = \sqrt{3}$ e $d = 1 - \sqrt{3}$.
   (e) Dati $a_0 = -\frac{3}{5}$ e $d = \frac{3}{10}$, calcolare a_{20}.
   (f) Se il sesto termine è 20 e la ragione è -3, quanto vale il decimo termine?
   (g) Sapendo che $a_9 = 22$ e che $d = 11$, calcolare a_{100}.

(3) Si consideri la progressione aritmetica $a_n = 10 + 3n$. Calcolare il dodicesimo termine.

(4) Data una progressione aritmetica con $a_0 = \frac{3}{4}$ e $d = -2$, determinare l'indice n per cui vale $a_n = -\frac{29}{4}$.

2. Progressioni geometriche

(1) Calcolare la ragione q di una progressione geometrica $a_0, a_1, a_2, \cdots$, sapendo che:
   (a) $a_1 = 10$ e $a_3 = 250$;
   (b) $a_2 = \frac{1}{6}$ e $a_4 = \frac{1}{54}$;
   (c) $a_0 = 3$ e $a_1 = 2$;
   (d) $a_0 = 3$ e $a_5 = 96$;
   (e) $a_0 = 10^{-5}$ e $a_6 = 10^7$.

(2) Si consideri una progressione geometrica $a_0, a_1, a_2, \cdots$ di ragione q.
   (a) Dati $a_0 = 3$ e $q = \frac{1}{2}$, calcolare a_{14}.
   (b) Dati $a_0 = \sqrt{3}$ e $q = -\sqrt{6}$, calcolare a_6.
   (c) Dati $a_0 = \frac{1}{16}$ e $q = -2$, calcolare a_9.
   (d) Dati $a_0 = \frac{1}{4}$ e $q = \frac{1}{4}$, calcolare a_5.

Date: December 2024.

1. Progressioni aritmetiche

(1) Calcolare la ragione d di una progressione aritmetica $a_0, a_1, a_2, \cdots$, sapendo che:

(a) $a_{14} = 21$ ed $a_0 = 4$;

(b) $a_4 = 22$ ed $a_2 = 8$;

(c) $a_5 = 42$ ed $a_0 = 32$;

(d) $a_{14} = 63$ ed $a_0 = 7$.

Ricordiamo che in una progressione aritmetica si ha

$a_n = a_0 + n \cdot d$; infatti $a_1 = a_0 + d$, $a_2 = a_1 + d = a_0 + 2d$, ecc.

(a) $a_{14} = a_0 + 14 \cdot d$, $21 = 4 + 14d \Rightarrow d = \frac{21-4}{14} = \frac{17}{14}$

(b) $a_4 = 22$, $a_2 = 8$; essendo $\left.\begin{array}{l} a_4 = a_3 + d \\ a_3 = a_2 + d \end{array}\right\} \Rightarrow a_4 = a_2 + 2d$

Quindi $22 = 8 + 2d$, $d = \frac{22-8}{2} = 7$

(c) $a_5 = 42$, $a_0 = 32$: $a_5 = a_0 + 5d$

$42 = 32 + 5d$, $d = \frac{42-32}{5} = 2$

(d) $a_{14} = 63$, $a_0 = 7$, $a_{14} = a_0 + 14d$

$63 = 7 + 14d$, $d = \frac{63-7}{14} = 4$

3. Polinomi di Taylor

(1) Approssimare la funzione $f(x) = \ln(1 + \sin x)$ con il polinomio di Taylor di ordine $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 0$.

(2) Approssimare la funzione $f(x) = e^{\sin x}$ con il polinomio di Taylor di ordine $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = \pi$.

(3) Approssimare la funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ con il polinomio di Taylor di ordine $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 0$.

(4) Si scriva il polinomio di Taylor $P_3(x)$ di ordine $n = 3$ e punto iniziale $x_0 = 1$ della funzione $f(x) = x^3 - x$, e si verifichi che $P_3(x) = f(x)$.

(5) Sia $f(x) = ax^2 + bx + c$ un generico polinomio di grado 2. Si scriva il polinomio di Taylor $P_2(x)$ di ordine $n = 2$ e punto iniziale x_0 generico. Si verifichi che $f(x) = P_2(x)$ per ogni scelta di $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$, $f''(x) = \dfrac{(\cos x)'(1+\sin x) - \cos x \cdot (1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$

$$= \frac{-\sin x \cdot (1+\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1}{1+\sin x}$$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} x^2 = 0 + 1 \cdot x + \frac{(-1)}{2} x^2$$

$$= x - \frac{1}{2} x^2$$

(2) $f(x) = e^{\sin x}$

$x_0 = \pi$

$f'(x) = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x} \cdot \cos x$

$f''(x) = (e^{\sin x})' \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot (\cos x)'$

$= e^{\sin x} \cdot \cos^2 x + e^{\sin x} \cdot (-\sin x)$

$= e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)$

$P_2(x) = f(\pi) + f'(\pi) \cdot (x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2} \cdot (x-\pi)^2$

$= e^{\sin \pi} + (e^{\sin \pi} \cdot \cos \pi) \cdot (x-\pi) + \frac{1}{2} \left(e^{\sin \pi} (\cos^2 \pi - \sin \pi)\right)(x-\pi)^2$

$= e^0 + (e^0 \cdot (-1))(x-\pi) + \frac{1}{2}\left(e^0((-1)^2 - 0)\right)(x-\pi)^2$

$= 1 - (x-\pi) + \frac{1}{2}(x-\pi)^2$

(3) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2$

(4) $f(x) = x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$

$P_3(x) = 2(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

$= (x-1)\left(2 + 3(x-1) + (x-1)^2\right)$

$= (x-1)(\cancel{2} + 3x - \cancel{3} + x^2 - 2x \cancel{+1})$

$= (x-1)(x^2+x) = (x-1)\, x\, (x+1) = f(x)$

5. $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f''(x) = 2a$$

$$P_2(x) = (a x_0^2 + b x_0 + c) + (2a x_0 + b) \cdot (x - x_0)$$

$$+ \frac{2a}{2}(x - x_0^2)$$

$$= (a x_0^2 + b x_0 + c) + (x - x_0)\big(2a x_0 + b + a \cdot (x - x_0)\big)$$

$$\overset{!}{=} (a x_0^2 + b x_0 + c) + (x - x_0)(2a x_0 + b + ax - a x_0)$$

$$\overset{!}{=} (a x_0^2 + b x_0 + c) + (x - x_0)(a x_0 + b + ax)$$

$$\overset{!}{=} (\cancel{a x_0^2} + \cancel{b x_0} + c) + \cancel{a x_0 x} + bx + ax^2 - \cancel{a x_0^2} - \cancel{b x_0} - \cancel{a x_0 x}$$

$$= ax^2 + bx + c$$

(2) Si consideri una progressione aritmetica $a_0, a_1, a_2, \cdots$ di ragione d.

(a) Dati $a_0 = \frac{3}{4}$ e $d = \frac{1}{4}$, calcolare a_{30}.

(b) Trovare il sesto termine se $a_0 = 4$ e $d = \frac{1}{2}$.

(c) Trovare il primo termine se $a_3 = \sqrt{3}$ e $d = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$.

(d) Trovare il sesto termine se $a_0 = \sqrt{3}$ e $d = 1 - \sqrt{3}$.

(e) Dati $a_0 = -\frac{3}{5}$ e $d = \frac{3}{10}$, calcolare a_{20}.

(f) Se il sesto termine è 20 e la ragione è -3, quanto vale il decimo termine?

(g) Sapendo che $a_9 = 22$ e che $d = 11$, calcolare a_{100}.