Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2024-2025, Primo esame invernale

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1.

• si calcoli $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 \log\left(\frac{6+x^2}{2+x^2}\right) - 4}{e^{\tan\left(\frac{3}{x}\right)} - 1 - \tan\left(\frac{3}{x}\right)} =: L$

$$\text{denom} = \cancel{1} + \cancel{\tan\left(\tfrac{3}{x}\right)} + \tfrac{1}{2}\tan^2\left(\tfrac{3}{x}\right) - \cancel{1} - \cancel{\tan\left(\tfrac{3}{x}\right)} + o\left(\tfrac{1}{x^2}\right) = \frac{9}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\text{num} = x^2 \lg\left(1 + \frac{6}{x^2}\right) - x^2 \lg\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) - 4$$

$$= x^2\left(\cancel{\frac{6}{x^2}} - \frac{36}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) - x^2\left(\cancel{\frac{2}{x^2}} - \frac{4}{2x^4} + o(x^4)\right) - \cancel{4}$$

$$= -(18-2)\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{-16\,\frac{1}{x^2}}{\frac{9}{2}\,\frac{1}{x^2}} = -\frac{32}{9}$$

• si calcoli esplicitamente la funzione $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ inversa di $\tanh(x) : \mathbb{R} \to (-1,1)$.

$$y = \text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \iff e^x y + e^{-x} y = e^x - e^{-x}$$

$$\iff e^{2x} y + y = e^{2x} - 1 \qquad e^{2x}(y-1) = -1-y$$

$$\iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \iff x = \frac{1}{2}\lg\frac{1+y}{1-y}$$

dove ricordiamo che $y \in (-1,1)$

ESERCIZIO N. 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

- si trovi il dominio di f e si calcolino i limiti sulle estremita del dominio;

Dom $= \{ x : x \neq 1 \}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \lim_{x \to 1^\pm} \frac{2}{x-1} = \pm\infty$$

- si calcoli $f'(x)$, si trovino punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-2}{(x-1)^2}$$

punti critici $x_\pm = 1 \pm \sqrt{2}$ con x_+ punto di min. locale e x_- punto di max. locale, lo si capisce dai limiti calcolati sopra

- si calcoli la derivata seconda e si studi concavita e convessita;

$$f''(x) = \left(1 - \frac{2}{(x-1)^2}\right)' = \frac{4}{(x-1)^3} \Rightarrow f \text{ concava}$$

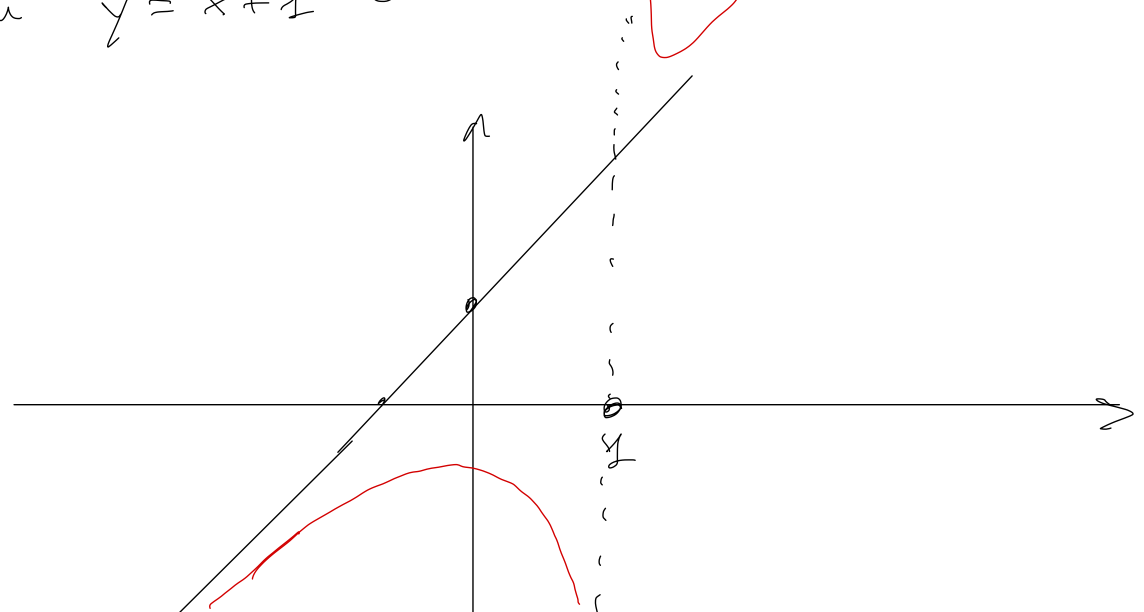
per $x < 1$ e convessa per $x > 1$

- si trovino le eventuali rette asintotiche e si tracci il grafico .

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1-x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

quindi $y = x+1$ è la retta asintotica sia a $+\infty$ che a $-\infty$



COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3.

• si calcoli $\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x(x+1)^2}}_{=R(x)} dx$ E' integrabile (confronto asintotico da $\lim_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{x^{-3}} = 1$ e $x^{-3} \in L([1,+\infty))$. $R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

$A = \frac{1}{(x+1)^2}\Big|_{x=0} = 1$, $A + B = 0 \Rightarrow B = -1$. Infine $C = \frac{1}{x}\Big|_{x=-1} = -1$

$\int_1^R \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx = \lg\frac{R}{R+1} - \lg\frac{1}{2} + \frac{1}{R+1} - \frac{1}{2} \xrightarrow{R\to+\infty} \lg 2 - \frac{1}{2}$

• si calcoli le primitive $\int x\sin^2(x)dx$;

$= \int x \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2}\int x - \frac{1}{2}\int x\cos(2x)\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\int x\,(\sin(2x))'\,dx$

$= \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin(2x)}{4} + \int \frac{\sin(2x)}{4} = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin(2x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{8} + C$

• si stabilisca se $x^2\sin(x^2)$ e' integrabile in $[2,+\infty)$; $y = x^2$ $dy = 2x\,dx$

$\int_1^R x^2 \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{R^2} y^{\frac{1}{2}} \sin(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_1^{R^2} y^{\frac{1}{2}}(-\cos y)'\,dy$

$= \underbrace{\frac{1}{2}\cos(1) - \frac{1}{2}R\cos(R^2)}_{\text{questo non ha limite per } R\to+\infty} + \underbrace{\frac{1}{4}\int_1^{R^2} \frac{\cos y}{y^{1/2}}\,dy}_{\text{questo ha limite finito per } R\to+\infty}$

$\Rightarrow x^2\sin(x^2) \notin L^2(2,\infty)$

• si stabilisca se $e^{-\frac{1}{x}} \in L(0,1]$.

$\lim_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$. Pertanto, ponendo $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$

risulta $f \in C^0([0,1])$. Allora f è integrabile per Riemann in $[0,1]$. Sappiamo che $F(y) = \int_y^1 f(x)\,dx$ è $F \in C^1([0,1])$ ed in particolare $\lim_{y\to0^+} F(y) = F(0) = \int_0^1 f(x)\,dx$ (= integrale di Riemann di f in $[0,1]$). Pertanto $e^{-\frac{1}{x}} \in L(0,1]$

ESERCIZIO N. 4. Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 4 di $f(x) = \log(1 + \sin(x))$.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$f(x) = \log\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$$

e da $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4)$ con $y = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}{3} - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4}{4} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

ESERCIZIO N. 5. Risolvere il problema con dato iniziale $y'' + y = \sin(x)$, $y(\overset{0}{\cancel{1}}) = 0$, $y'(0) = 1$.

$$y_h = A\sin(x) + B\cos(x)$$

$$y_p = xC\sin(x) + xD\cos(x)$$

$$L[y_p] = C\left[(x\sin x)'' + x\sin x\right] + D\left[(x\cos x)'' + x\cos x\right]$$

$$= 2C\cos x - 2D\sin x = \sin x \Rightarrow C = 0 \quad D = -\frac{1}{2}$$

$$y = A\sin(x) + B\cos x - \frac{1}{2}x\cos x$$

$$y(0) = B = 0$$

$$y' = A\cos(x) - B\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}x\sin x\Big|_{x=0} = A - \frac{1}{2} = 1$$

$$A = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x}$$