MATEMATICA E STATISTICA 2024-25
ESERCIZI - FOGLIO 4

(1) Si usi la definizione di derivata per determinare le derivate delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x^2 - 3x; \quad f(x) = 1 + 4x - 5x^2; \quad f(x) = \frac{1}{3+4x}; \quad f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$f(t) = \frac{t}{1+t}; \quad g(s) = \frac{1}{s^2}; \quad \alpha(z) = \frac{z^2-3}{z^2+3}; \quad \sigma(x) = \frac{2}{x^3}.$$

(2) Si considerino le funzioni $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite nel modo seguente:

$$f(x) = \sin x, \qquad g(z) = z^2, \qquad h(w) = e^w.$$

Si esprimano tutte le possibili funzioni ottenute come composizione delle tre funzioni, e se ne calcolino le derivate.

(3) Si consideri la *funzione segno* così definita

$$\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ -1 \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

- Come dovrebbe essere definita la funzione
$$f(x) = x \ \ \mathrm{sgn}(x), \quad x \neq 0$$
in $x = 0$ per essere continua in tale punto? Sarebbe allora derivabile in $x = 0$?
- Come dovrebbe essere definita la funzione
$$g(x) = x^2 \ \ \mathrm{sgn}(x), \quad x \neq 0$$
in $x = 0$ per essere continua in tale punto? Sarebbe allora derivabile in $x = 0$?

(4) In quali punti non è derivabile la funzione
$$h(x) = |x^2 + 3x + 2| \ ?$$
Si giustifichi la risposta.

(5) Determinare le equazioni delle rette tangenti ai grafici delle seguenti funzioni nel punto indicato:
- $f(x) = 5 + 4x - x^2$, nel punto $(2, f(2))$;
- $f(x) = \frac{x}{x^2-2}$, nel punto $(-2, f(-2))$;
- $f(x) = \frac{2}{x^2+x}$, nel punto $(a, f(a))$.

(6) Si dimostri che la derivata di una funzione pari è dispari, e che la derivata di una funzione dispari è pari.

① $f(x) = x^2 - 3x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) - (x^2-3x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{3x} - 3h - \cancel{x^2} + \cancel{3x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(2x+h-3)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h-3) = 2x-3$$

$f(x) = x + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{x}+h) + \frac{1}{x+h} - \cancel{x} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h + \frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - \frac{h}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(1 - \frac{1}{x(x+h)}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$\alpha(z) = \frac{z^2-3}{z^2+3}$

$$\alpha'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(z+h) - \alpha(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(z+h)^2-3}{(z+h)^2+3} - \frac{z^2-3}{z^2+3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{((z+h)^2-3)(z^2+3) - (z^2-3)((z+h)^2+3)}{h\cdot((z+h)^2+3)(z^2+3)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{(z+h)^2\cdot z^2} - 3z^2 + 3(z+h)^2 - \cancel{9} - (\cancel{z^2(z+h)^2} - 3(z+h)^2 + 3z^2 - \cancel{9})}{h\cdot((z+h)^2+3)(z^2+3)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6(z+h)^2 - 6z^2}{h\cdot((z+h)^2+3)(z^2+3)} = \lim_{h\to 0} \frac{6(\cancel{z^2} + 2zh + h^2 - \cancel{z^2})}{h((z+h)^2+3)(z^2+3)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{6\cancel{h}(2z+h)}{\cancel{h}((z+h)^2+3)(z^2+3)}}$$

è una funzione definita in $h=0$ e ivi continua $\Rightarrow$

$$= \frac{6\cdot 2z}{(z^2+3)^2}$$

② Considero solo alcune delle composizioni:

$$f(x) = \sin x, \qquad g(z) = z^2, \qquad h(w) = e^w.$$

- $f(g(h(w))) = f(g(e^w)) = f((e^w)^2) = f(e^{2w}) = \sin(e^{2w})$

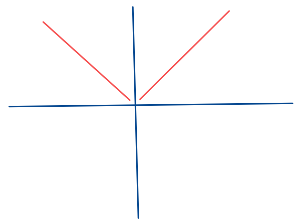
$$(\sin(e^{2w}))' = \cos(e^{2w}) \cdot (e^{2w})' = \cos(e^{2w}) \cdot 2 \cdot e^{2w}$$

- $h(g(f(x))) = h(g(\sin x)) = h((\sin x)^2) = e^{(\sin x)^2} = e^{2\sin x}$

$$\left(e^{2(\sin x)}\right)' = e^{2(\sin x)} \cdot (2(\sin x))' = e^{2(\sin x)} \cdot 2\cos x$$

- $g(h(f(x))) = g(h(\sin x)) = g(e^{\sin x}) = \left(e^{\sin x}\right)^2 = e^{2\sin x}$

③ $$f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} x \cdot 1 & \text{se } x > 0 \\ x \cdot (-1) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

Per avere continuità in 0 bisogna porre $f(0) = 0$.
Dalla definizione segue $f(x) = |x|$ e in 0 non è derivabile

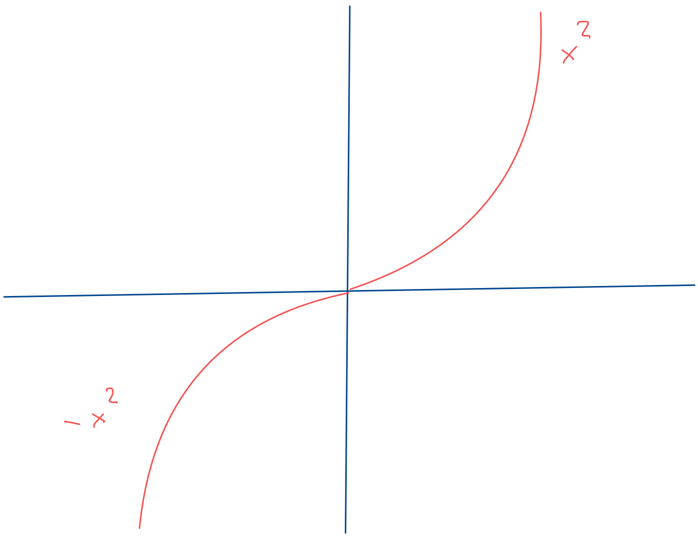
Se $$f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} x^2 \cdot 1 & \text{se } x > 0 \\ x^2 \cdot (-1) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Per avere continuità bisogna porre $f(0) = 0$ (ragionamento simile al precedente)

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-h) = 0$$

$\Rightarrow$ sì, la funzione è derivabile in 0.



(6) Supp. che f sia una FUNZIONE PARI, cioè

$* \quad f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in D$

Cons. la funzione derivata prima: $f'(x)$

Per $*$ abbiamo $(f(-x))' = f'(x)$

$$= (f((-1)\cdot x))'$$
$$= (-1)\cdot f'(-x) = f'(x)$$

$\Rightarrow$ f' è DISPARI

Analogamente, se f è DISPARI: $f(-x) = -f(x)$

$$(f(-x))' = (-f(x))'$$
$$= (-1)\cdot f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$