

# Geometria

## Programma del corso

Docente: Prof. Daniele Zuddas

Anno accademico 2024-2025

**Nozioni preliminari** Richiami sugli insiemi: unione, intersezione, differenza insiemistica,  $n$ -uple ordinate, prodotto cartesiano. Cenni sui quantificatori logici.

**Numeri** Richiami sui numeri naturali, interi, razionali e reali, cenni sui campi. Numeri complessi: forma algebrica e polare, operazioni, proprietà principali, radici  $n$ -esime.  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$ .

**Funzioni** Dominio, codominio, grafico, immagine, immagine inversa, funzione composta, funzioni iniettive, suriettive e biiettive, funzioni invertibili.

**Polinomi** Operazioni sui polinomi in una indeterminata, divisione con resto, molteplicità delle radici, radici razionali di polinomi interi, principio di identità dei polinomi, Teorema fondamentale dell'Algebra (solo enunciato), fattorizzazione di un polinomio complesso.

**Matrici** Somma, moltiplicazione per uno scalare, matrice identica, prodotto righe per colonne e sue proprietà, trasposta, spazio delle righe e spazio delle colonne, rango, calcolo del rango col metodo di Gauss, matrice inversa, calcolo della matrice inversa col metodo di Gauss, gruppo lineare generale, determinante, formule di Laplace (senza dimostrazione), matrici triangolari, teorema di Binet (senza dimostrazione), matrice cofattore, relazione tra rango e determinante, formula per la matrice inversa, matrici simili, matrici congruenti, matrici definite positive, matrici simmetriche, matrici ortogonali e ortogonali speciali.

**Spazi vettoriali** Assiomi di spazio vettoriale su un campo, sottospazi vettoriali, combinazioni lineari, dipendenza e indipendenza lineare, generatori, spazi vettoriali finitamente generati, basi, esistenza delle basi (solo per spazi vettoriali finitamente generati), coordinate dei vettori rispetto ad una base, dimensione, teorema del completamento della base, equazioni parametriche e Cartesiane di sottospazi vettoriali, codimensione.

**Sistemi lineari** Forma matriciale, soluzioni, sistemi compatibili e incompatibili, sistemi equivalenti, matrici e sistemi a gradini, risoluzione di un sistema a gradini, parametri liberi, soluzione generale, operazioni elementari sulle righe di una matrice, metodo di eliminazione di Gauss e risoluzione di un sistema lineare arbitrario, sistemi dipendenti da parametri, sistemi omogenei. Spazio delle soluzioni, teorema di struttura, teorema di Rouché-Capelli, regola di Cramer.

**Applicazioni lineari** Applicazioni lineari tra spazi vettoriali, applicazione lineare associata ad una matrice, nucleo e immagine, rango di un'applicazione lineare, teorema della dimensione, teorema di determinazione di un'applicazione lineare, matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi del dominio e del codominio, matrice del cambiamento di base, composizione di applicazioni lineari e prodotto righe per colonne di matrici, cambiamento di base per applicazioni lineari, isomorfismi, invarianza della dimensione, endomorfismi, determinante di un endomorfismo. Diagonalizzazione di endomorfismi e di matrici quadrate, polinomio caratteristico, autovalori e autovettori, autospazi, molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore, basi diagonalizzanti, teorema di diagonalizzazione.

**Spazi affini** Sottospazi affini di spazi vettoriali, dimensione, traslazioni, giacitura, equazioni parametriche e Cartesiane di sottospazi affini, iperpiani, sottospazi affini incidenti, paralleli e sghembi, posizione reciproca di rette e piani affini, rette sghembe in  $\mathbb{R}^3$ . Sottospazio affine generato da un insieme finito di punti, retta per due punti distinti, piano per tre punti non allineati.

**Spazi Euclidei** Forme bilineari, forma bilineare associata ad una matrice quadrata, matrice di una forma bilineare rispetto ad una base, cambiamento di base per forme bilineari, prodotti scalari, vettori e sottospazi vettoriali ortogonali, complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale, dimensione del complemento ortogonale, norma, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, disuguaglianza triangolare per la norma, angolo tra due vettori, indipendenza lineare di vettori ortogonali, ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, basi ortonormali. Endomorfismi autoaggiunti, esistenza di autovalori, ortogonalità degli autospazi, teorema spettrale, diagonalizzazione di matrici simmetriche reali. Proiezione ortogonale su un sottospazio vettoriale, distanza Euclidea, disuguaglianza triangolare per la distanza, distanza tra punto e iperpiano affine, angolo tra due rette affini, prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ . Cenni sulle isometrie e rototraslazioni del piano Euclideo.