Esame di Analisi matematica I : esercizi

A.a. 2024-2025, Secondo esame invernale

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1.

• Si calcoli $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{2}+\sinh^2(x)\right)-2x+\frac{1}{\log_4 e}}{(1-\tanh(x))^2}$ $\Big\}\ f(x)$

$$\text{Num} = \lg\left(\frac12+\frac{(e^x-e^{-x})^2}{4}\right)-2x+\frac{1}{\lg_4 e} = \lg\left(\cancel{\frac12}+\frac{e^{2x}+e^{-2x}\cancel{-2}}{4}\right)-2x+\frac{1}{\lg_4 e}$$

$$= \lg\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)-\cancel{\lg 4}-2x+\cancel{\frac{1}{\lg_4 e}}$$ dove ho usato $\lg 4=\frac{1}{\lg_4 e}$

$$= \lg\left(e^{2x}(1+e^{-4x})\right)-2x = \cancel{2x}+\lg(1+e^{-4x})\cancel{-2x}$$

$$= e^{-4x}(1+o(1)) \quad ; \quad 1-\mathrm{th}\, x = 1-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$= \frac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 2e^{-2x}(1+o(1))$$

Pertanto $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-4x}(1+o(1))}{4e^{-4x}(1+o(1))} = \frac14$

• Dimostrare che la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^5-x^3+2x+1$ é biettiva e per $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$.

$\lim_{x\to +\infty,\, -\infty} f(x) = +\infty,\ -\infty \Rightarrow f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ dal teorema dei valori intermedi. Inoltre $f'(x)=5x^4-3x^2+2>0$ $\forall x$ perché il discriminante di $p(y)=5y^2-3y+2$ è

$$\Delta = 9-4\cdot5\cdot2 = 9-40<0 \quad \text{e} \quad 5>0.$$

Quindi f è strettamente crescente e biettiva.

g è strettamente crescente e pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \sup D(f) = \sup \mathbb{R} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \inf D(f) = \inf \mathbb{R} = -\infty$$

dove $D(f)$ è il dominio di f, ovvero $D(f)=\mathbb{R}$

ESERCIZIO N. 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

- si trovi il dominio di f e se ne analizzi il comportamento sulle estremita del dominio;

$x \in D(f) \iff \frac{1}{x-1} \in D(\arcsin) = [-1,1]$, cioè $-1 \le \frac{1}{x-1} \le 1$

Se $0 < \frac{1}{x-1} \le 1 \iff 1 \le x-1 \iff x \ge 2$

Se $-1 \le \frac{1}{x-1} < 0 \iff \cancel{1}-x \ge \cancel{1} \iff 0 \ge x$

Quindi $D(f) = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$, $f(2) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $f(0) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \arcsin(0) = 0$

- si calcoli $f'(x)$, si trovino punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2\sqrt{1-\frac{1}{(x-1)^2}}} < 0 \quad \forall x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$

Per $x \ge 2$

$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)\left((x-1)^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}$ $*$

Per $x \le 0$

$f'(x) = \frac{1}{(x-1)\left((x-1)^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}$ $**$

- si calcoli la derivata seconda e si studi concavita e convessita;

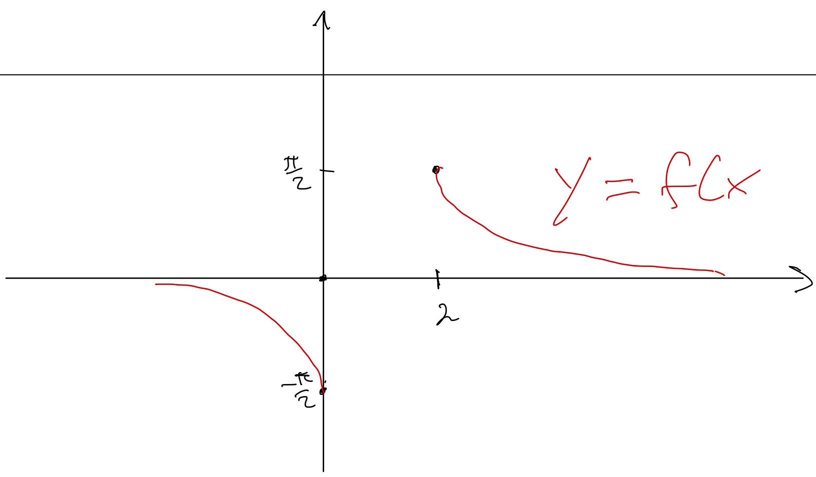
Per $x > 2$ $f''(x) \overset{\text{da } *}{=} \left(\frac{-1}{(x-1)(x^2-2x)^{\frac{1}{2}}}\right)' = \frac{1}{(x-1)^2(x^2-2x)}\left((x^2-2x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{x-1}{(x^2-2x)^{\frac{1}{2}}}(2x-2)\right)$

$= \frac{1}{(x-1)^2(x^2-2x)^{\frac{3}{2}}}\left(\underbrace{x^2-2x}_{\ge 0 \text{ in } D(f)} + (x-1)^2\right) > 0$ per $x > 2$ convessa

Per $x < 0$ da $**$ $f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2(x^2-2x)^{\frac{3}{2}}}\left(x^2-2x+(x-1)^2\right) < 0$ concava

- si trovino le eventuali rette asintotiche e si tracci il grafico .

$y = 0$ è la retta asintotica a $\pm\infty$



COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3.

- si calcoli $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$ $\quad y = \sqrt{x} \quad dy = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$= 2\int_0^1 \frac{1}{y^2+1}dy = 2 \arctan y \Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$

- si calcoli le primitive $\int \sin^2(2x)\cos^2(2x)dx$; $= \int \frac{1-\cos(4x)}{2}\frac{1+\cos(4x)}{2}dx$

$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int \cos^2(4x)\,dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(8x)}{2}dx$

$= \frac{x}{8} - \frac{1}{8}\int \cos(8x)\,dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(8x)}{64} + C$

- si stabilisca se $x^2e^{-\frac{1}{x}}$ e' integrabile in $[-1,0)$;

Abbiamo $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^3}}$ $\quad y = -\frac{1}{x}$

$= \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^3} = +\infty \Rightarrow$ siccome $\frac{1}{x} \notin L([-1,0))$

segue $x^2e^{-\frac{1}{x}} \notin L([-1,0))$

- si stabilisca se $\underbrace{\frac{e^{x^2}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}}_{f(x)} \in L(0,1)$.

$f \in L(0,1) \Leftrightarrow f \in L((0,\tfrac{1}{2}])$ e $f \in L([\tfrac{1}{2},0))$

Abbiamo $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{x^2}}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1-x}} = 1$

$\frac{1}{\sqrt{x}} \in L((0,\tfrac{1}{2}]) \Rightarrow f \in L((0,\tfrac{1}{2}])$

Abbiamo $\frac{1}{\sqrt{x}} \in L((0,\tfrac{1}{2}]) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x}} \in L([\tfrac{1}{2},0))$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow f \in L([\tfrac{1}{2},0))$

ESERCIZIO N. 4. Calcolare tutti i polinomi di McLaurin di $f(x) = \overset{\text{dispari}}{\arcsin(x)}$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{j} (-1)^j x^{2j} + o(x^{2n})$$

da $f(0)=0$ segue

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \sum_{j=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{j} (-1)^j t^{2j}\,dt + \int_0^x o(t^{2n})\,dt$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{j} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}}_{P_{2n+1}(x)} + o(x^{2n+1})$$

ESERCIZIO N. 5. Calcolare la soluzione generale di $\underbrace{y'' + y' + y}_{L[y]} = xe^x$

Polinomio caratteristico $p(r) = r^2 + r + 1$

ha zeri $r^2 + r + 1 = 0$ $\quad r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4}}{2}$

$$= -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_h = e^{-\frac{x}{2}}\left(A\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

$$y_p = (Cx + D)e^x \qquad L[y_p] = C\,L[xe^x] + D\,L[e^x]$$

$$= C\left((xe^x)'' + (xe^x)' + xe^x\right) + De^x p(1)$$

$$(xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$(xe^x)'' = 2e^x + xe^x$$

$$\Rightarrow L[y_p] = C\,e^x(2 + x + 1 + x + x) + 3De^x$$

$$= e^x\left[3Cx + 3(C+D)\right] = xe^x$$

$$3C = 1 \qquad C + D = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{3} \qquad D = -\frac{1}{3}$$