Lezioni sui sistemi di punti materiali

22 - 24 - 29 Aprile 2024 $\sim$ 4 ore

Appunti basati su

Gettys - Cantatore - Vannini - Vitale cap. 13 1.2.3.

e ulteriori approfondimenti in

Mazzoldi Nigro Voci, Elementi di Fisica cap. 5 4.5.6.7.8,

III edizione

1) Come mai i corpi si mettono in rotazione?

2) quale è la migliore maniera di descriverne il moto?

1) Come mai i corpi si mettono in rotazione?

2) quale è la migliore maniera di descriverne il moto?

Cominciamo da

2) $\longrightarrow$ Definiamo momento angolare

1) Come mai i corpi si mettono in rotazione?

2) quale è la migliore maniera di descriverne il moto?

Cominciamo da

2) $\longrightarrow$ Definiamo momento angolare

prima un solo corpo puntiforme

$\downarrow$

poi più corpi puntiformi

$\downarrow$

infine corpo rigido

Def. di momento angolare (analogie)

× traslazioni $\qquad \vec{p} = m \vec{v}$

linear momentum

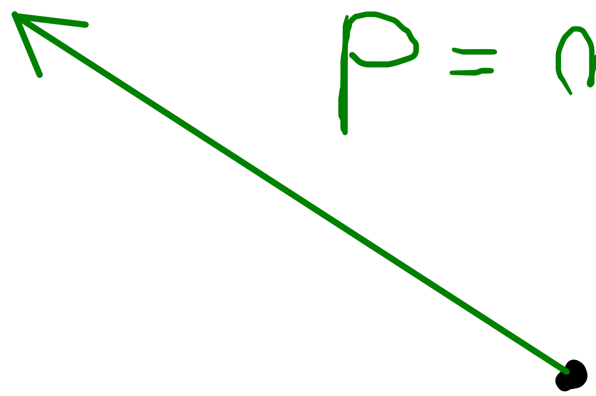
× rotazioni

momento angolare

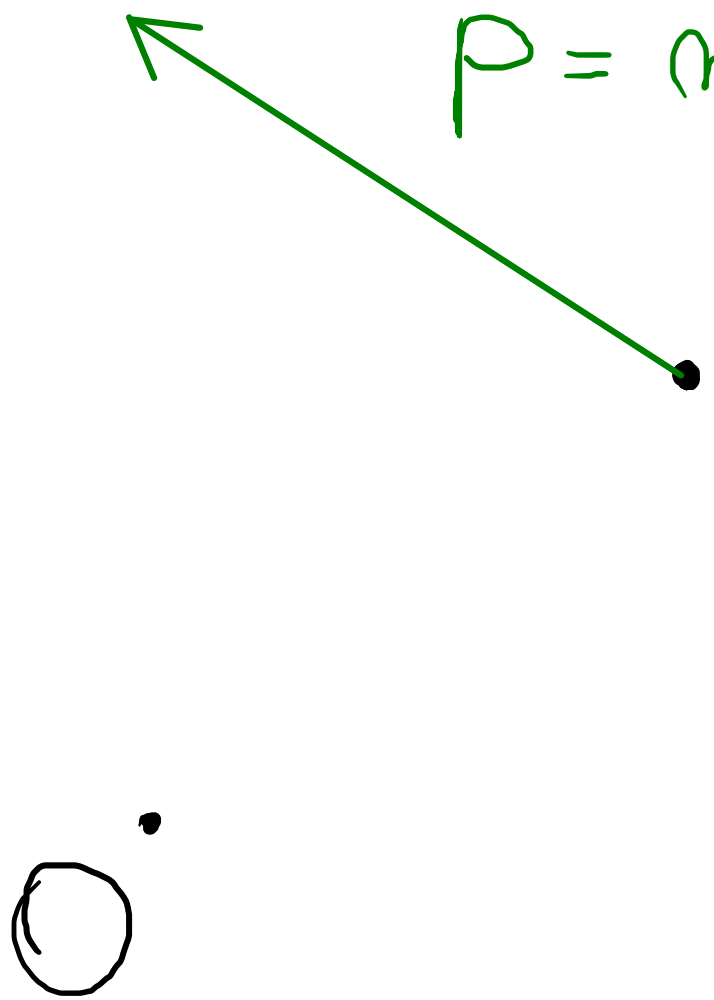
angular momentum

Un corpo puntiforme si muove nello spazio

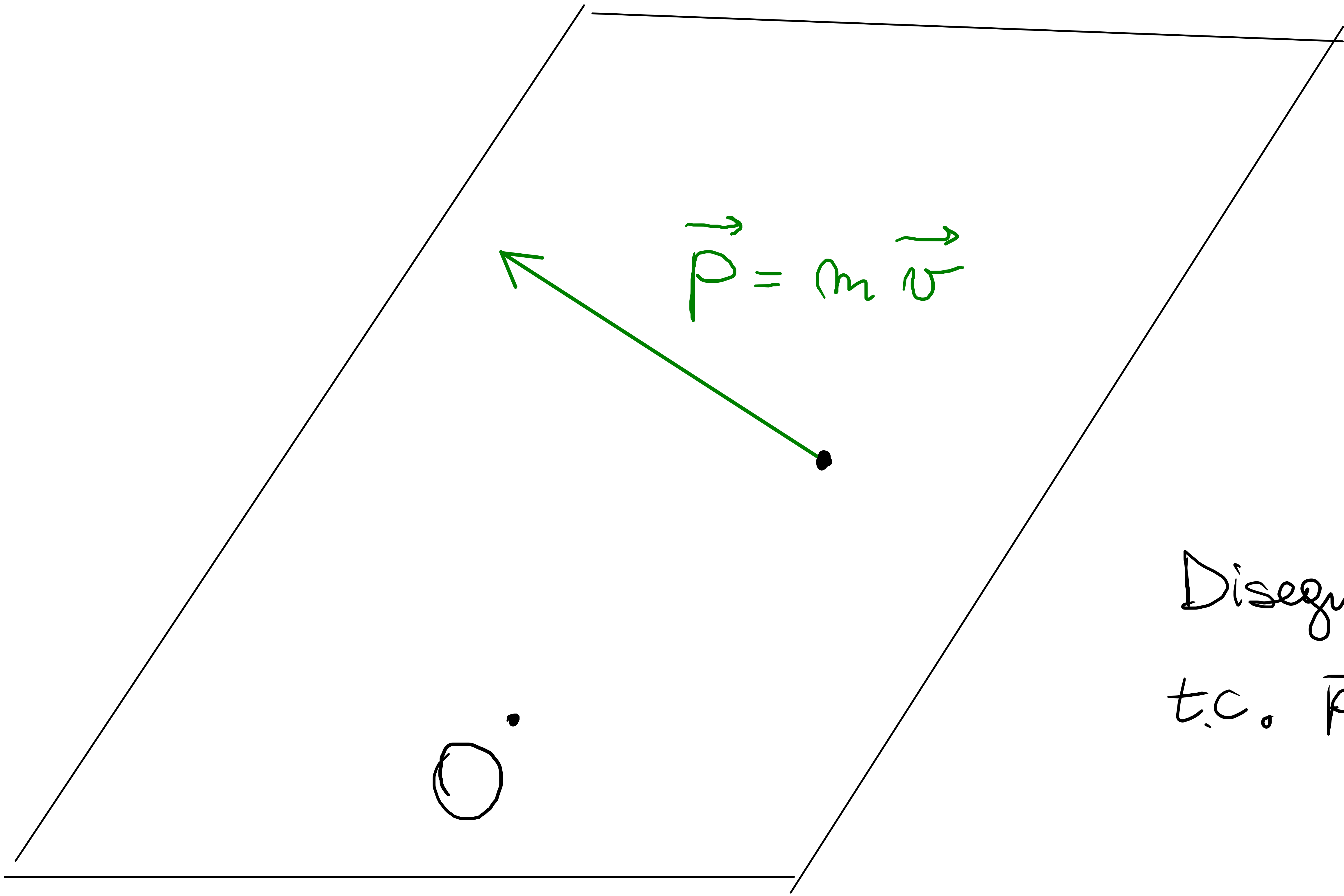
$$\vec{p} = m\vec{v}$$



$\vec{p} = m\vec{v}$

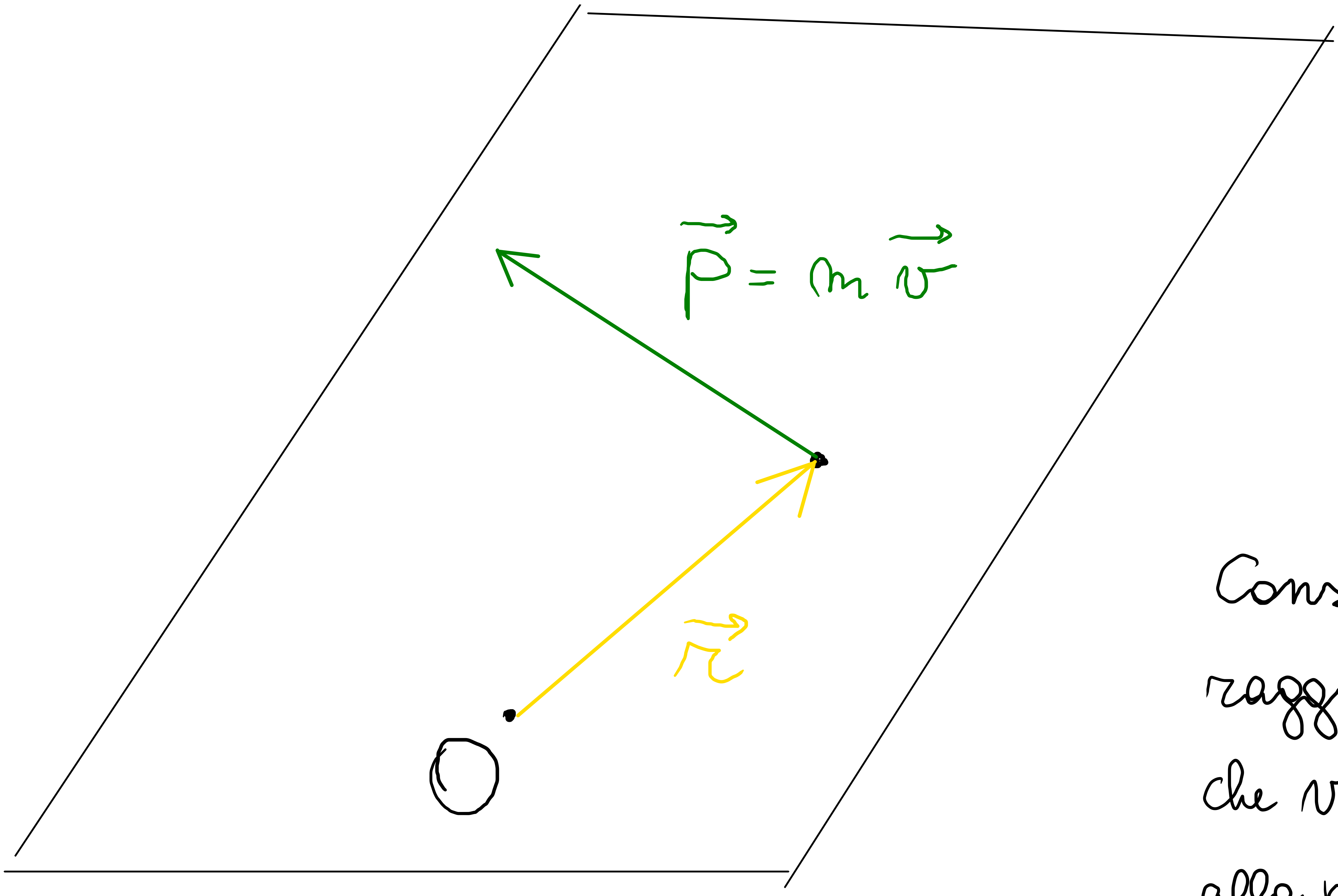


Prendo il punto di riferimento O detto "polo"

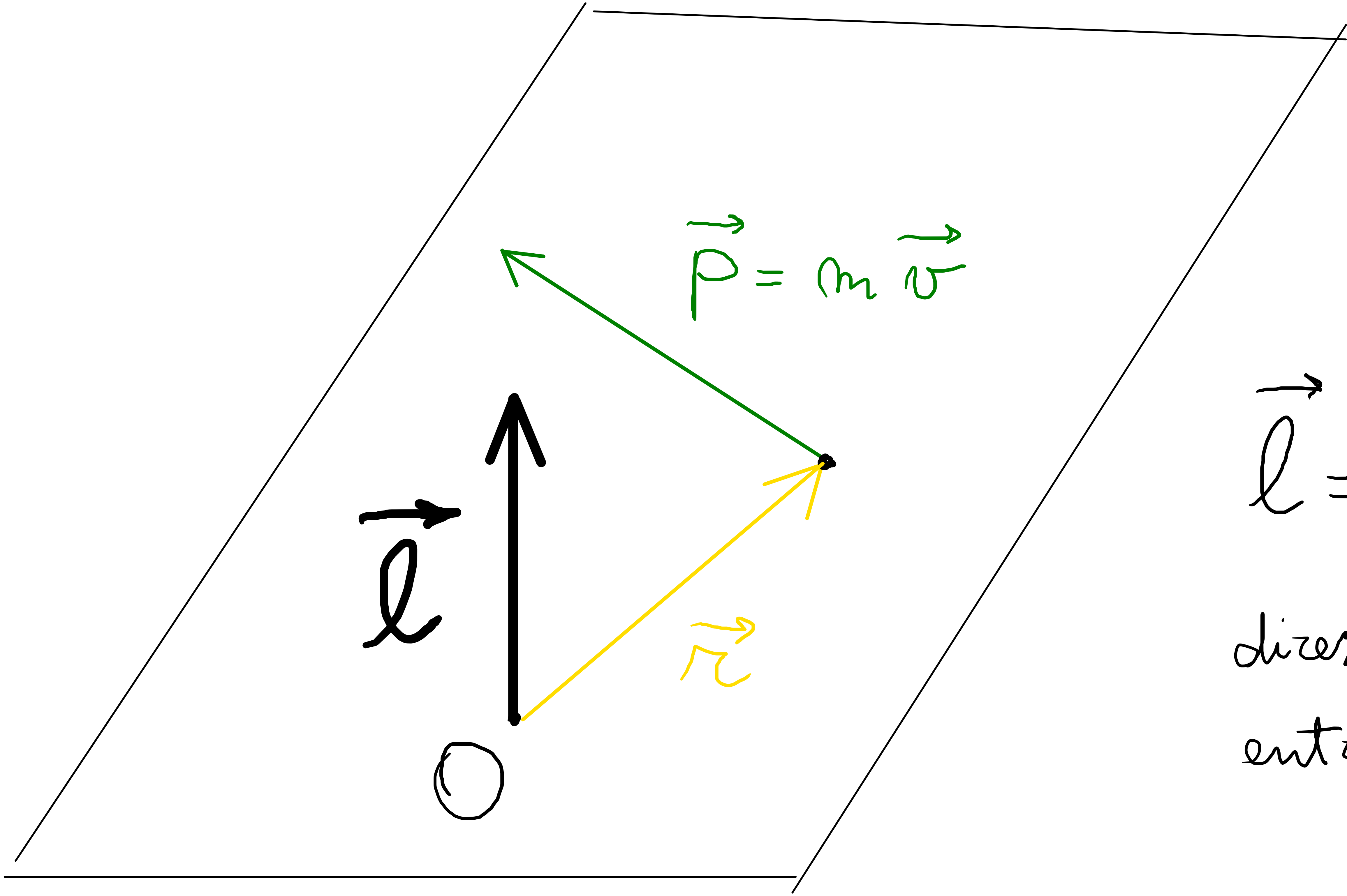


Disegno il piano

t.c. $\vec{p}$ & O $\in$ "

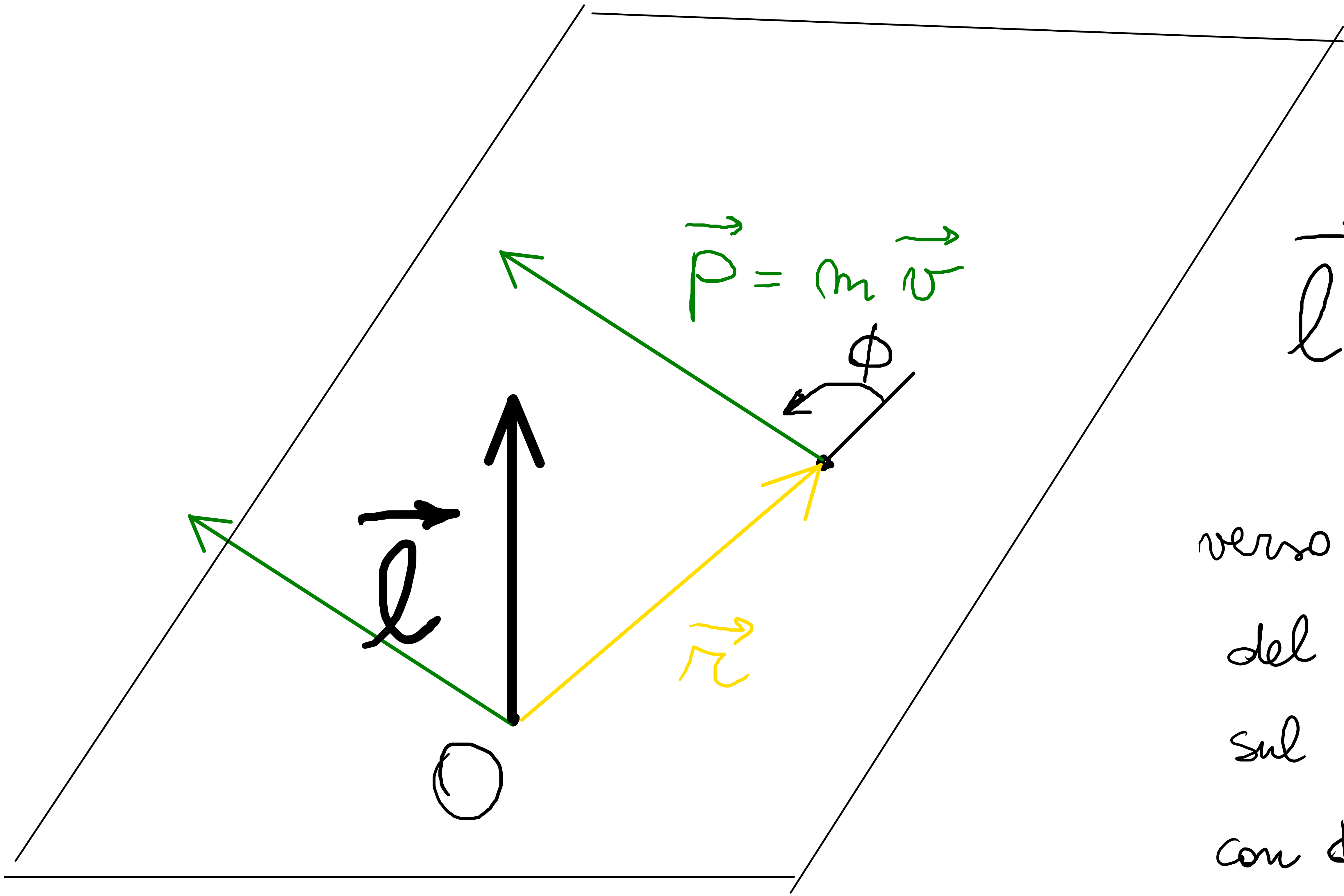


Considero il raggio vettore $\vec{r}$ che va da O alla posizione del corpo in moto



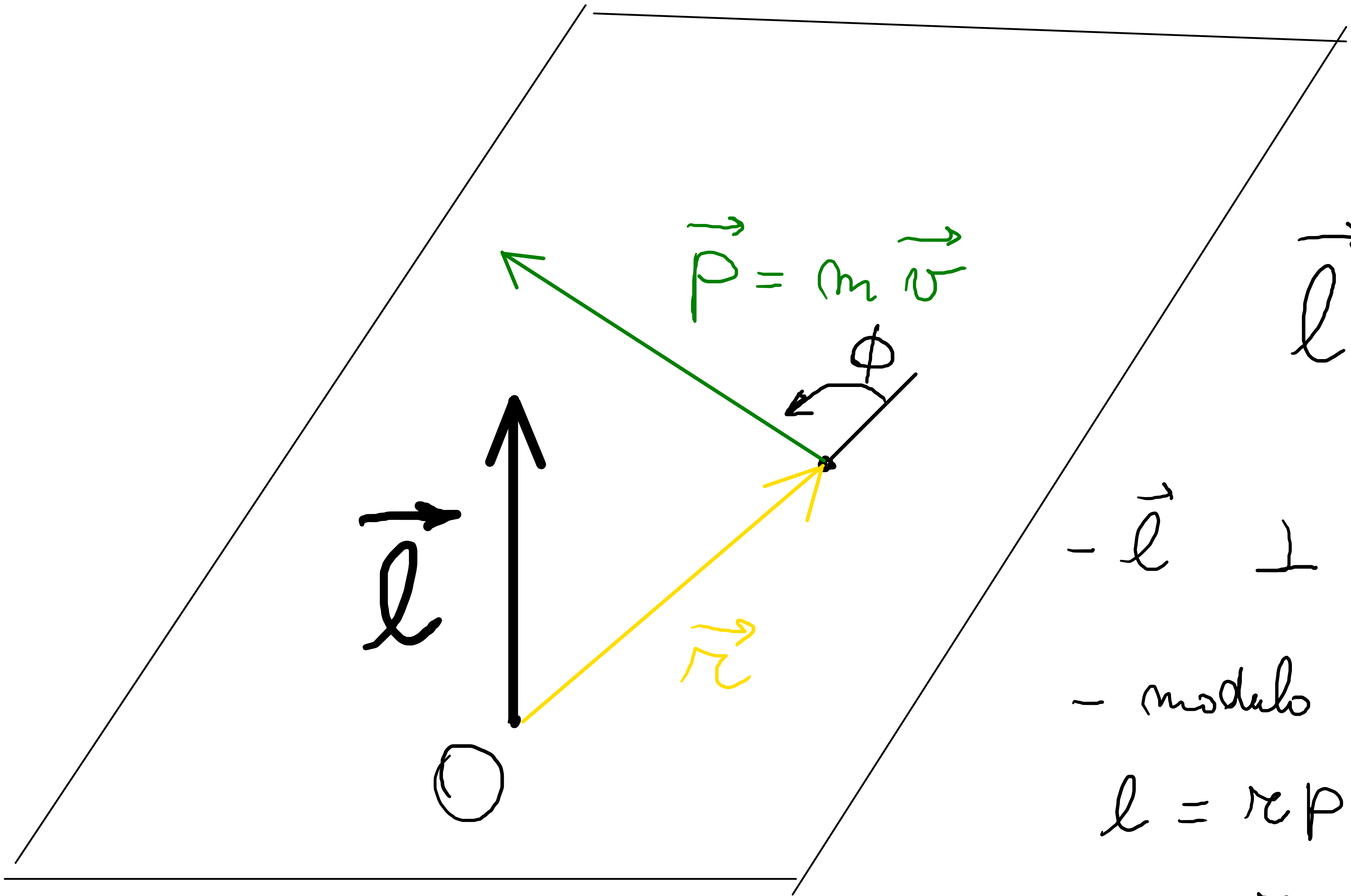
$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

direzione $\perp$ entrambi



$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

verso: rotazione del primo $\vec{r}$ sul secondo $\vec{p}$ con $\phi < 180^\circ$



$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$

- $\vec{\ell}$ $\perp$ piano $\vec{r}$ e $\vec{p}$
- modulo di $\vec{\ell}$

$$\ell = r p \sin\phi$$
$$= r_\perp p =$$
$$= r p_\perp$$

Def. di momento angolare

× traslazioni

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

linear momentum

× rotazioni

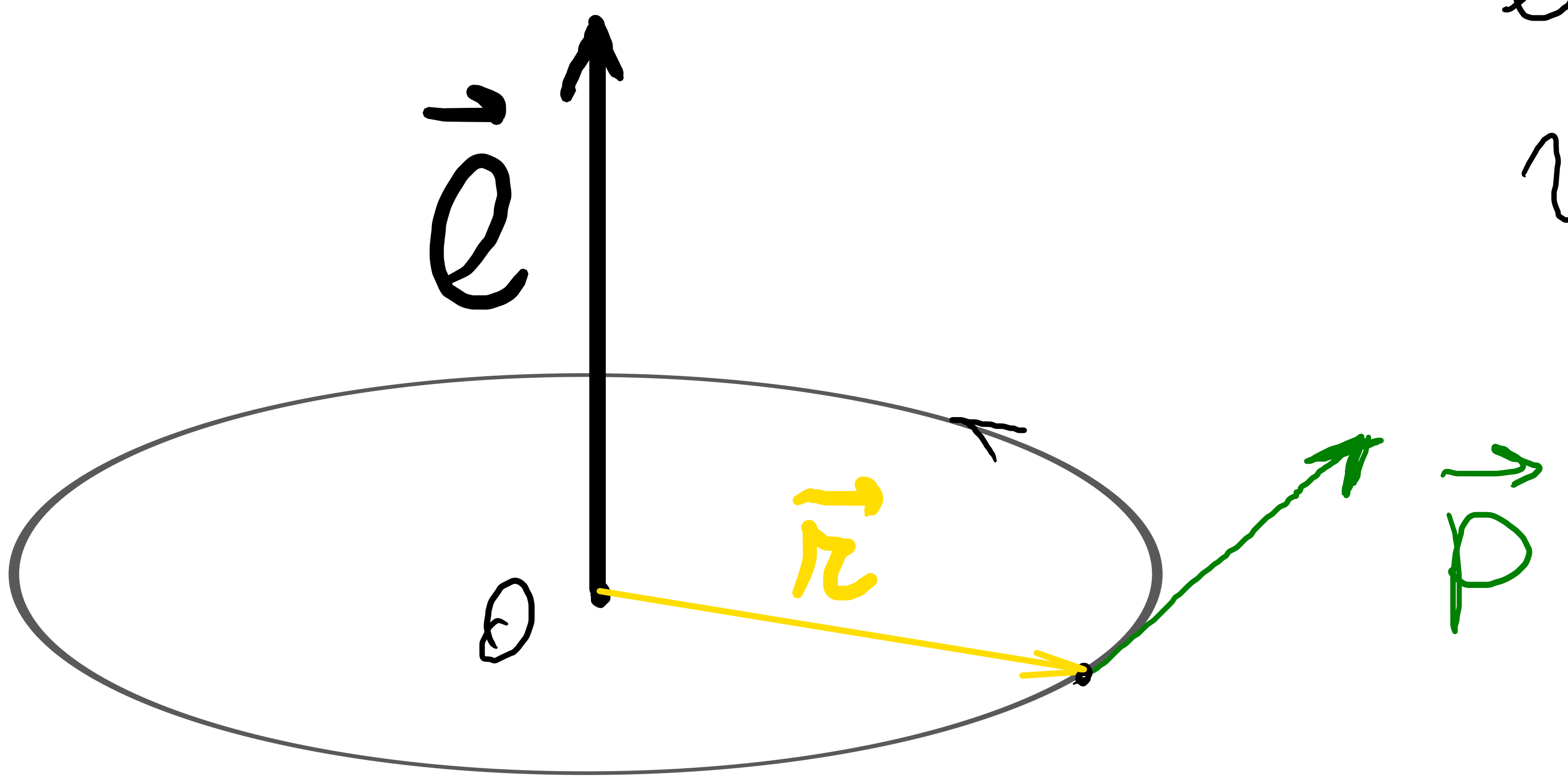
$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

momento angolare

angular momentum

Es. punto materiale su traiettoria circolare

R



$\vec{r} \perp \vec{p}$

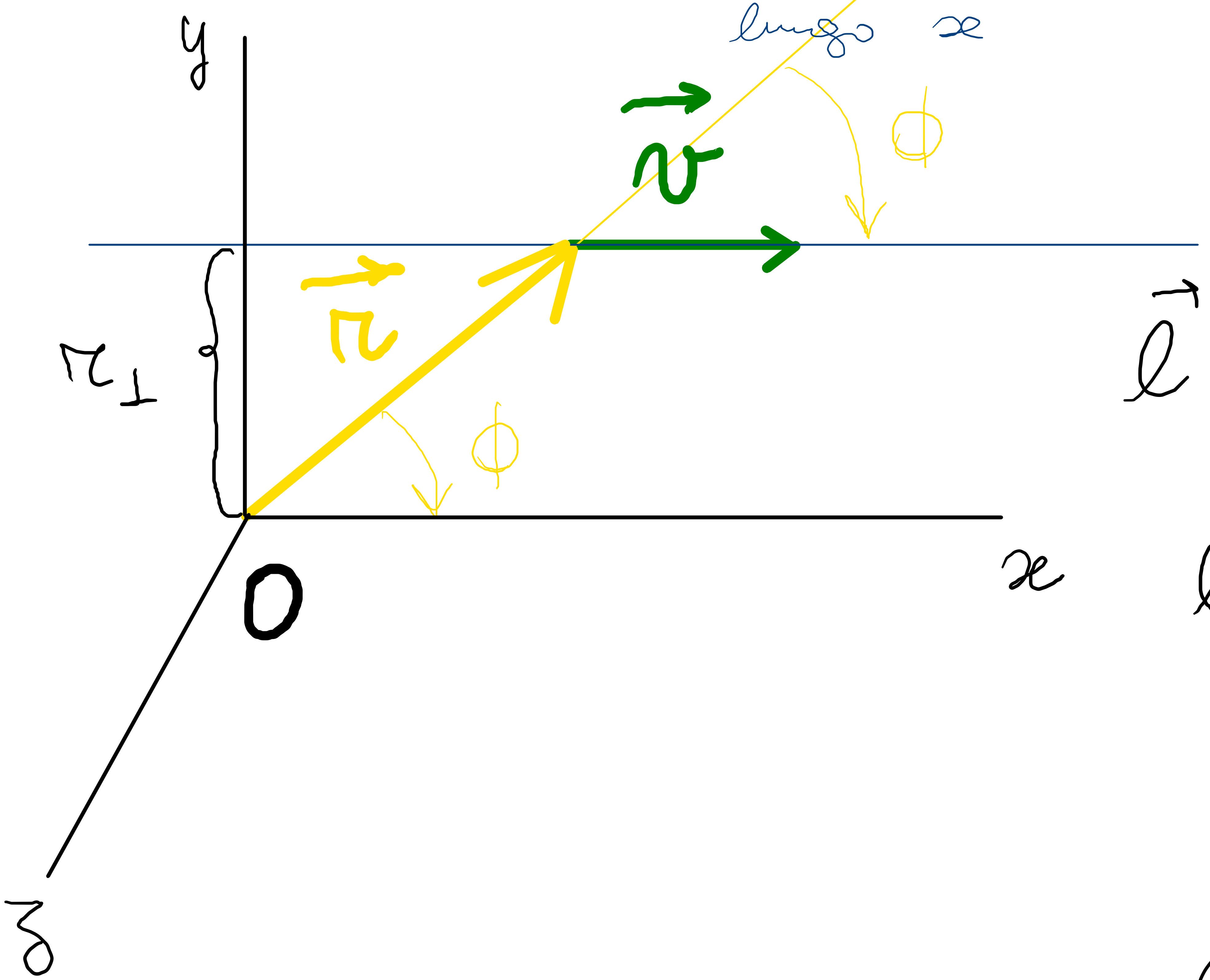
$\ell = R m v$

$v = \omega R$

$$\ell = m R^2 \omega$$

Esempio 2

traiettoria rettilinea e moto unif
lungo x



$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$

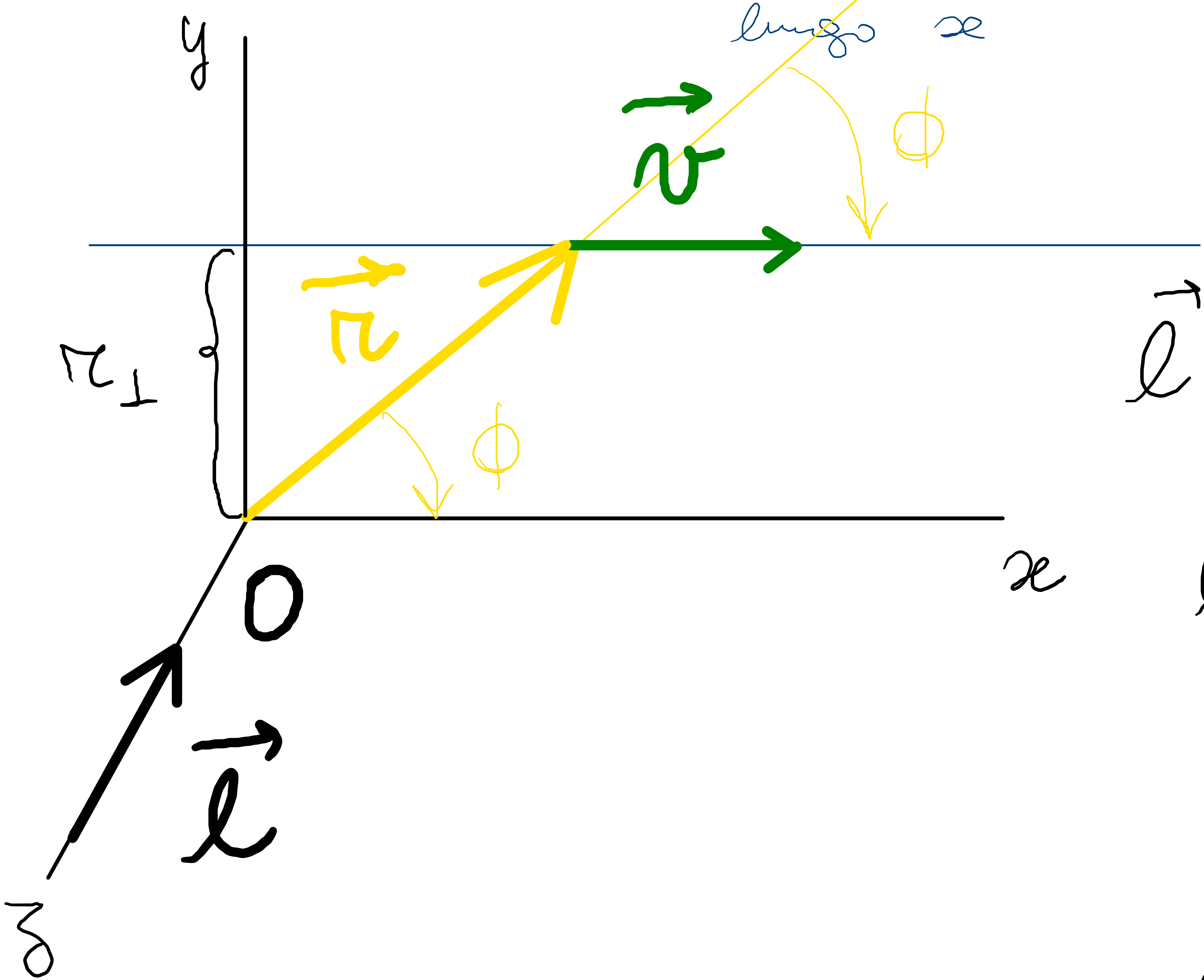
$$\ell = r p \sin\phi$$

$$= \underbrace{mv}_{\text{cost}} \, r_\perp$$

anche $r_\perp$ è cost

ℓ è costante

Esempio 2 traiettoria rettilinea e moto unif lungo x



$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\ell = r p \sin\phi$$

$$= \underbrace{mv}_{cost} r_\perp$$

anche $r_\perp$ è cost

ℓ è costante

anche $\vec{\ell}$ è costante

Per far variare $\vec{v}$ e $\vec{p}$
bastava applicare un qq $\vec{F} \neq 0$

Per far variare $\vec{v}$ e $\vec{p}$

bastava applicare un qq $\vec{F} \neq 0$,

vale lo stesso per $\vec{\omega}$ e $\vec{l}$?

Per far variare $\vec{v}$ e $\vec{p}$
bastava applicare un qq $\vec{F} \neq 0$,

vale lo stesso per $\vec{\omega}$ e $\vec{\ell}$?

No, non basta, qui serve applicare

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ momento della forza $\vec{F}$ $\vec{F}$
rispetto stesso polo O

Che relazione c'è fra $\vec{l}$ e

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

momento di una forza $\vec{F}$

rispetto allo stesso polo O

Ipotesi sist. di rif. inerziale

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right)$$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \times m\vec{v}}_{=0} + \vec{r} \times \underbrace{m\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}}}_{\sum\vec{F}}$$

Ipotesi polo fisso

$$\vec{r} \times \sum\vec{F} = \sum\left(\vec{r} \times \vec{F}_i\right)$$

$$\vec{r} \times \Sigma \vec{F} = \Sigma(\vec{r} \times \vec{F}_i) = \Sigma \vec{\tau}_i = \Sigma \vec{\tau} = \boxed{\vec{\tau}}$$

$\vec{\tau}$ momento risultante delle forze applicate

teorema del momento angolare

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}$$

vale:

- sist inerziale
- se entrambi momenti sono calcolati rispetto allo stesso polo FISSO

$$\boxed{\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{\tau}}$$

- analogo $\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}$

Sempre per analogia

$\vec{p}$ si conserva quando $\Sigma\vec{F} = 0$

- Quando si conserva $\vec{\ell}$?

$\vec{\ell}$ si conserva quando $\vec{\tau} = 0$

se $\Sigma\vec{F} = 0$ o $\Sigma\vec{F} \parallel \vec{r}$

come faccio a far variare $\vec{L}$?

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

per variare di $d\vec{L}$

$$\vec{\tau} \cdot dt = d\vec{L}$$

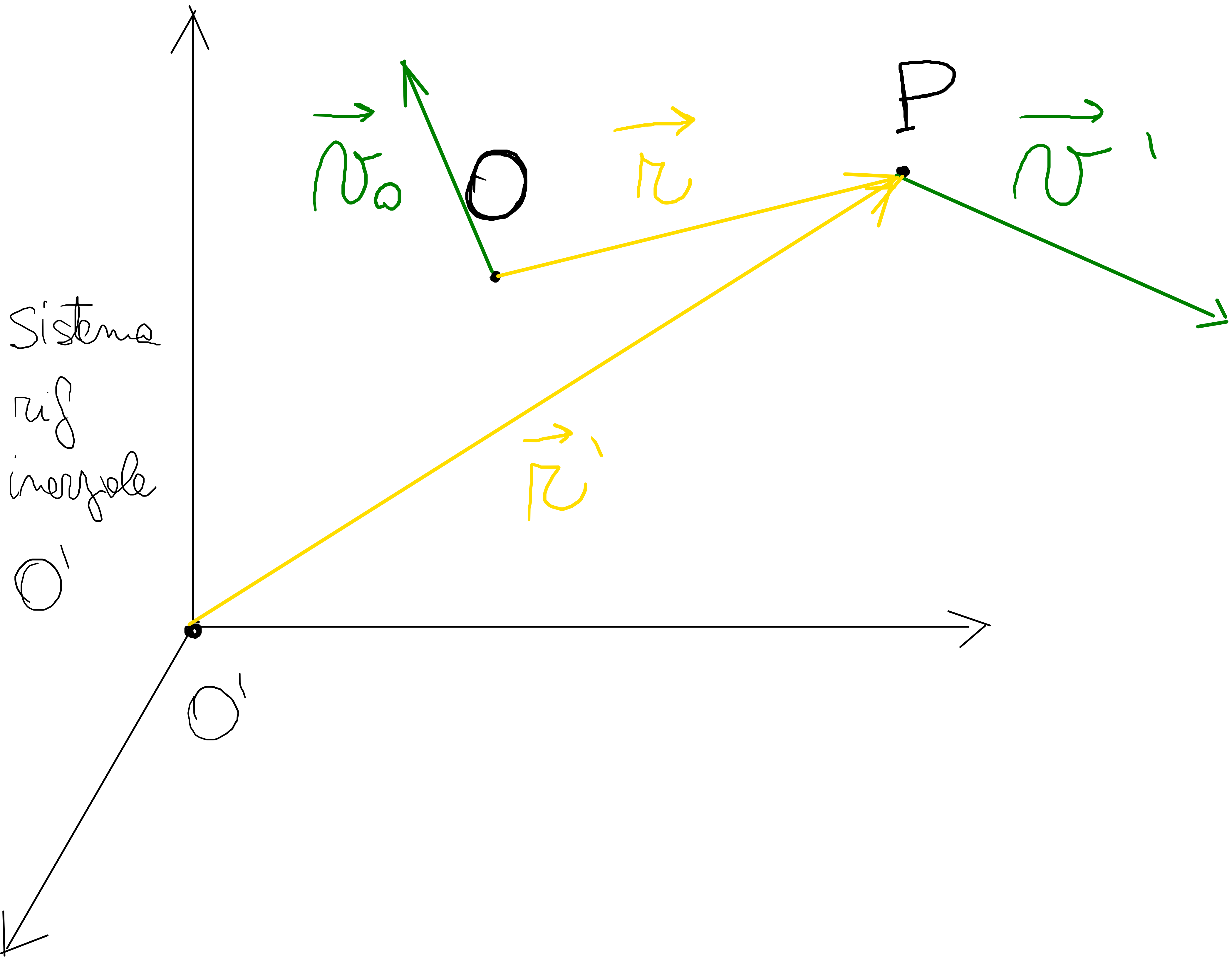
$$\Delta \vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{\tau} \cdot dt$$

COMPLICAZIONE:

Cosa succede se il polo O si muove?

Ad esempio: asse di rotazione del mio sistema è in moto

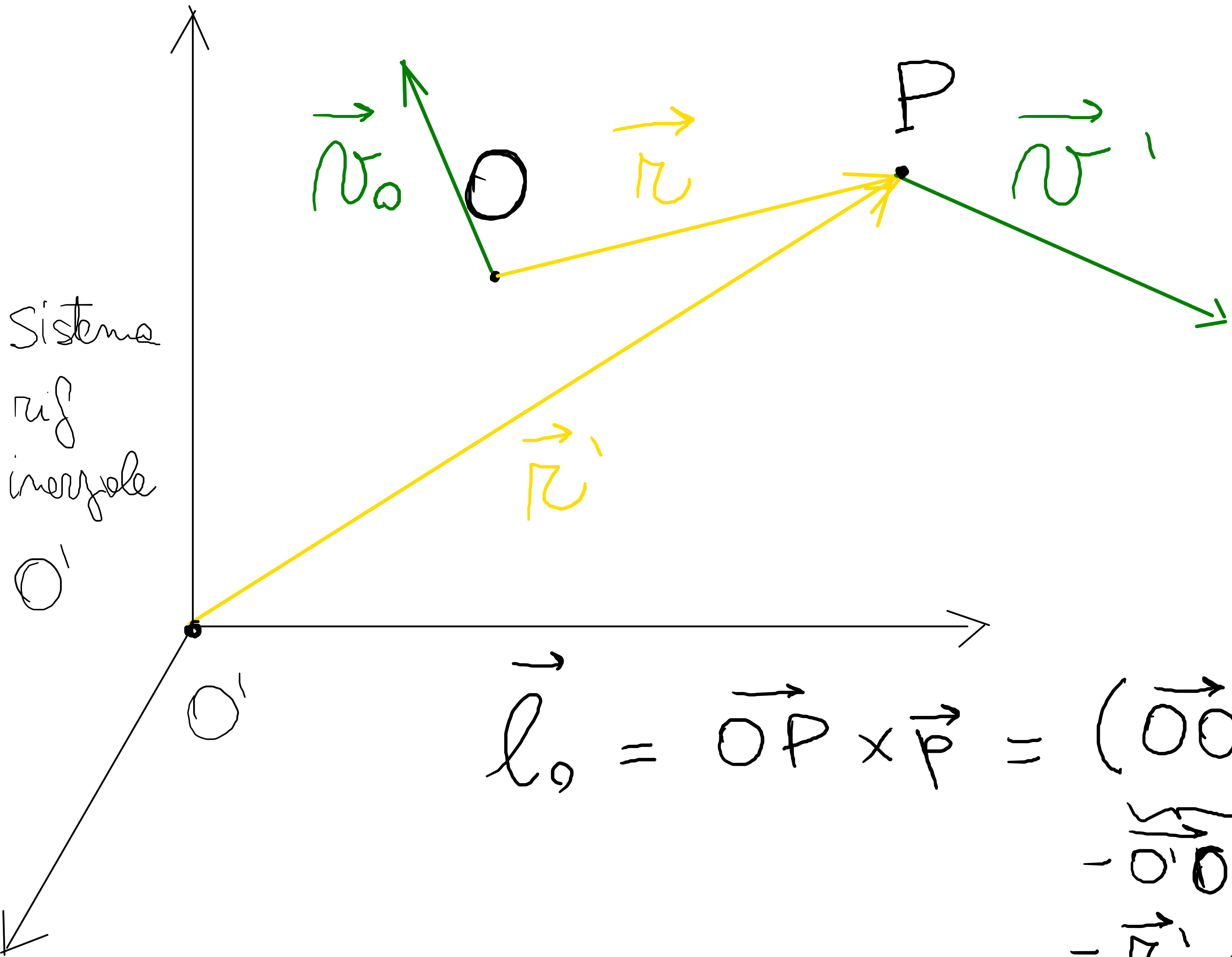
Cosa succede se O si muove



$$\vec{p} = m\vec{v}'$$

$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times \vec{p}$$

Cosa succede se O si muove



$$\vec{p} = m\vec{v}'$$

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{l}_O = \vec{OP} \times \vec{p} = (\underbrace{\vec{OO'}}_{-\vec{O'O}} + \underbrace{\vec{O'P}}_{\vec{r}'}) \times \vec{p}$$

$\vec{r}'$ posizione di P risp. O'

$-\vec{r}'_O$ posizione di O risp. O'

$$\vec{l}_o = \left(\vec{r}\,' - \vec{r}\,'_o\right) \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\,' - \vec{r}\,'_o\right)\right] \times \vec{p} + \underbrace{\left(\vec{r}\,' - \vec{r}\,'_o\right)}_{\vec{r}} \times \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\Sigma\vec{F}}$$

$$\left[\vec{v}\,' - \vec{v}_o\right] \times \underbrace{\vec{p}}_{m\vec{v}\,'} + \vec{r} \times \Sigma\vec{F}$$

$$0 - \vec{v}_o \times \vec{p} + \vec{\tau}_o$$

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \vec{\tau}_o - \vec{v}_o \times \vec{p}$$

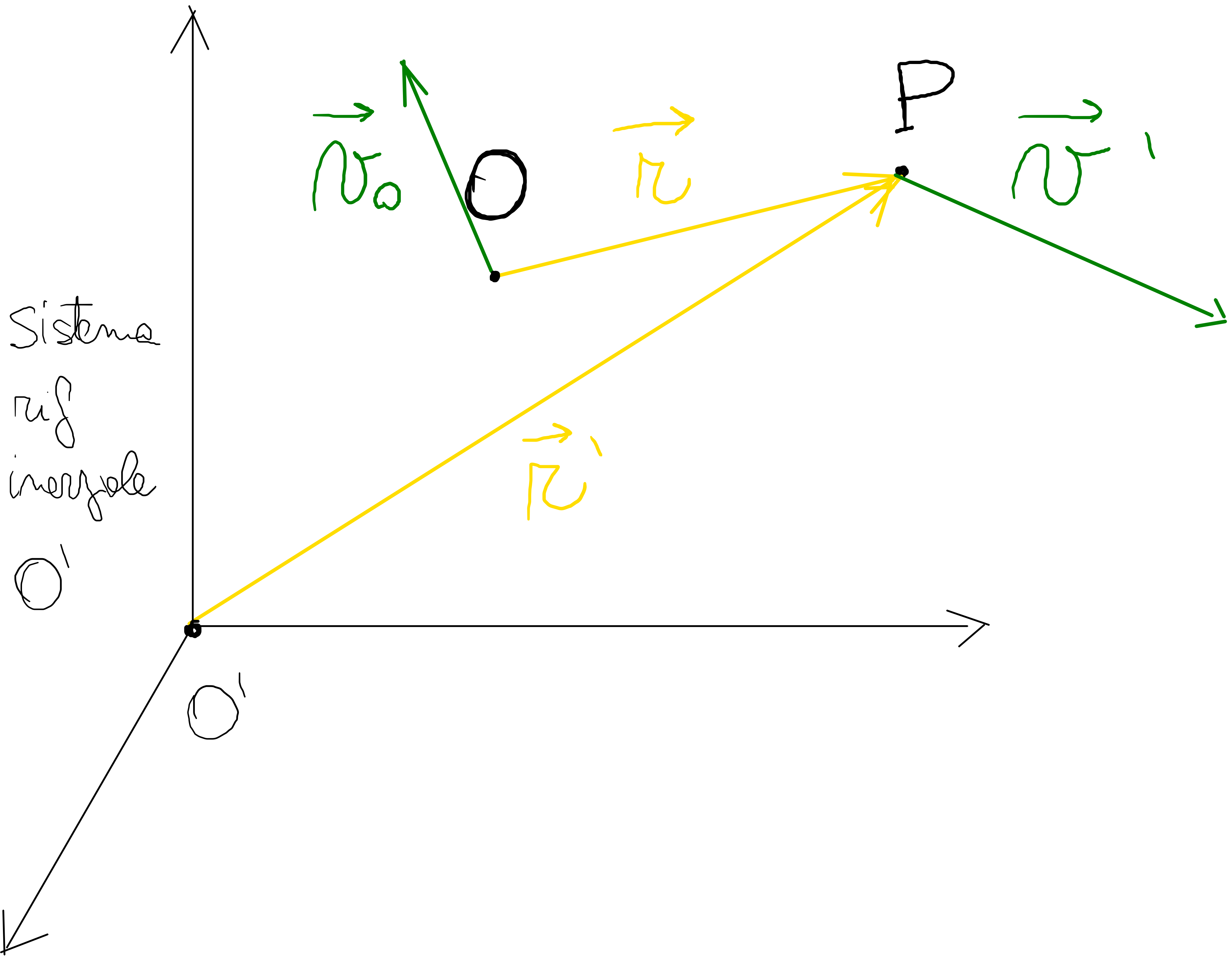
velocità del
polo mobile

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \vec{\tau}_o - \vec{v}_o \times \vec{p}$$

velocità del polo mobile

- Se O è fisso rispetto s.r.i $\vec{v}_o = 0$
- Se O è mobile $\longrightarrow$ devo stare attento a meno che non prenda casi particolari

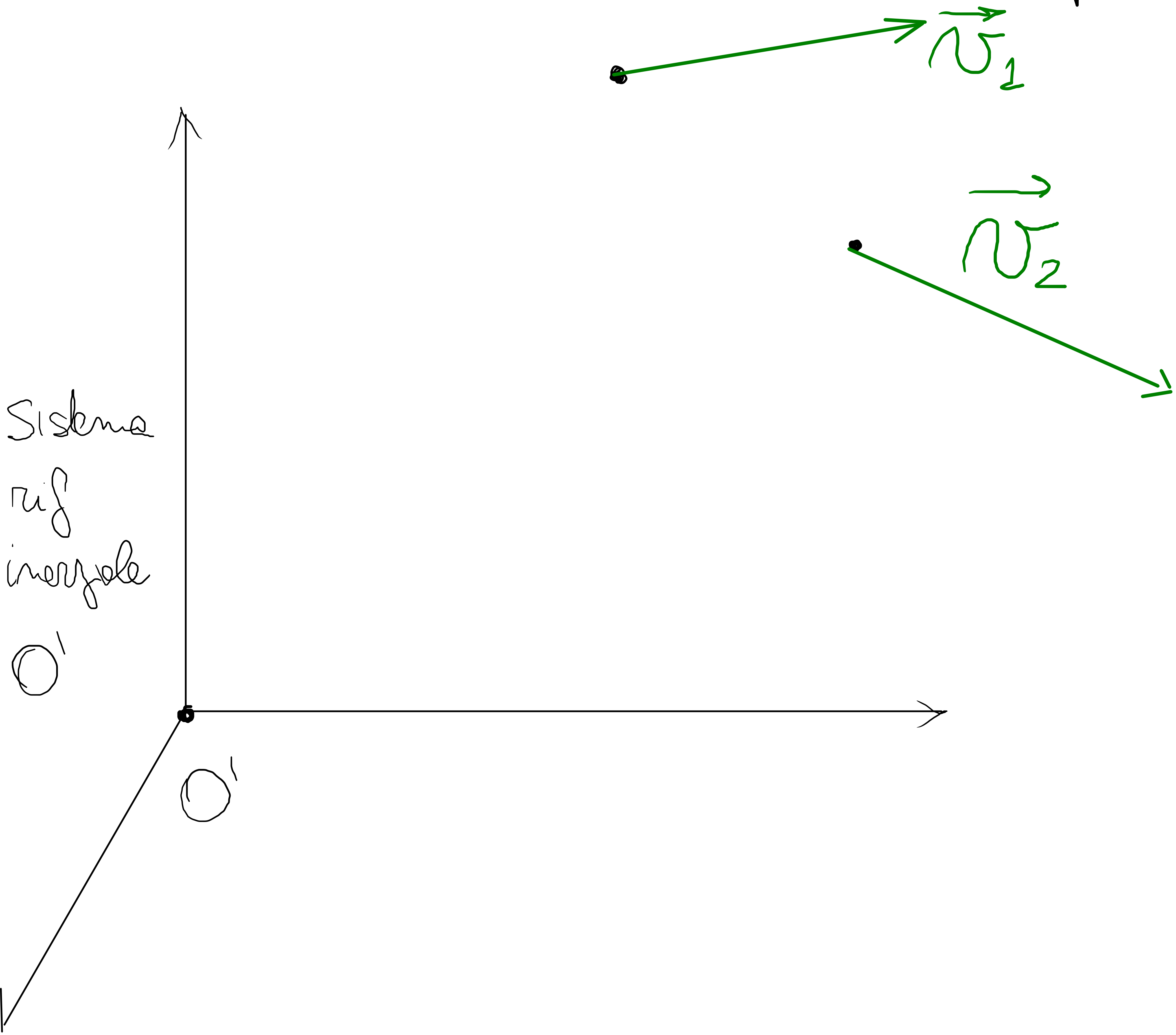
Passiamo ora ad 1 corpo



$$\vec{p} = m\vec{v}'$$

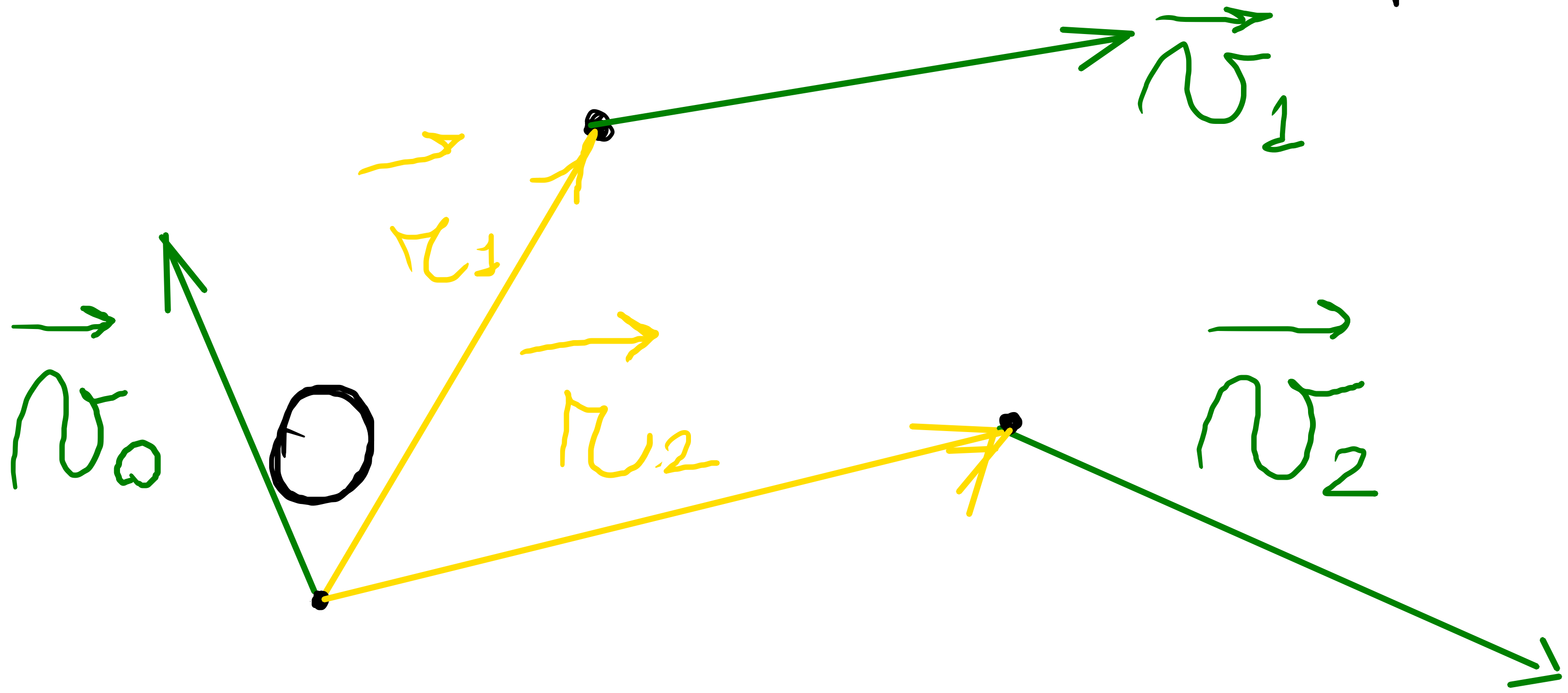
$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

Passiamo ora da 1 corpo a N corpi



$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

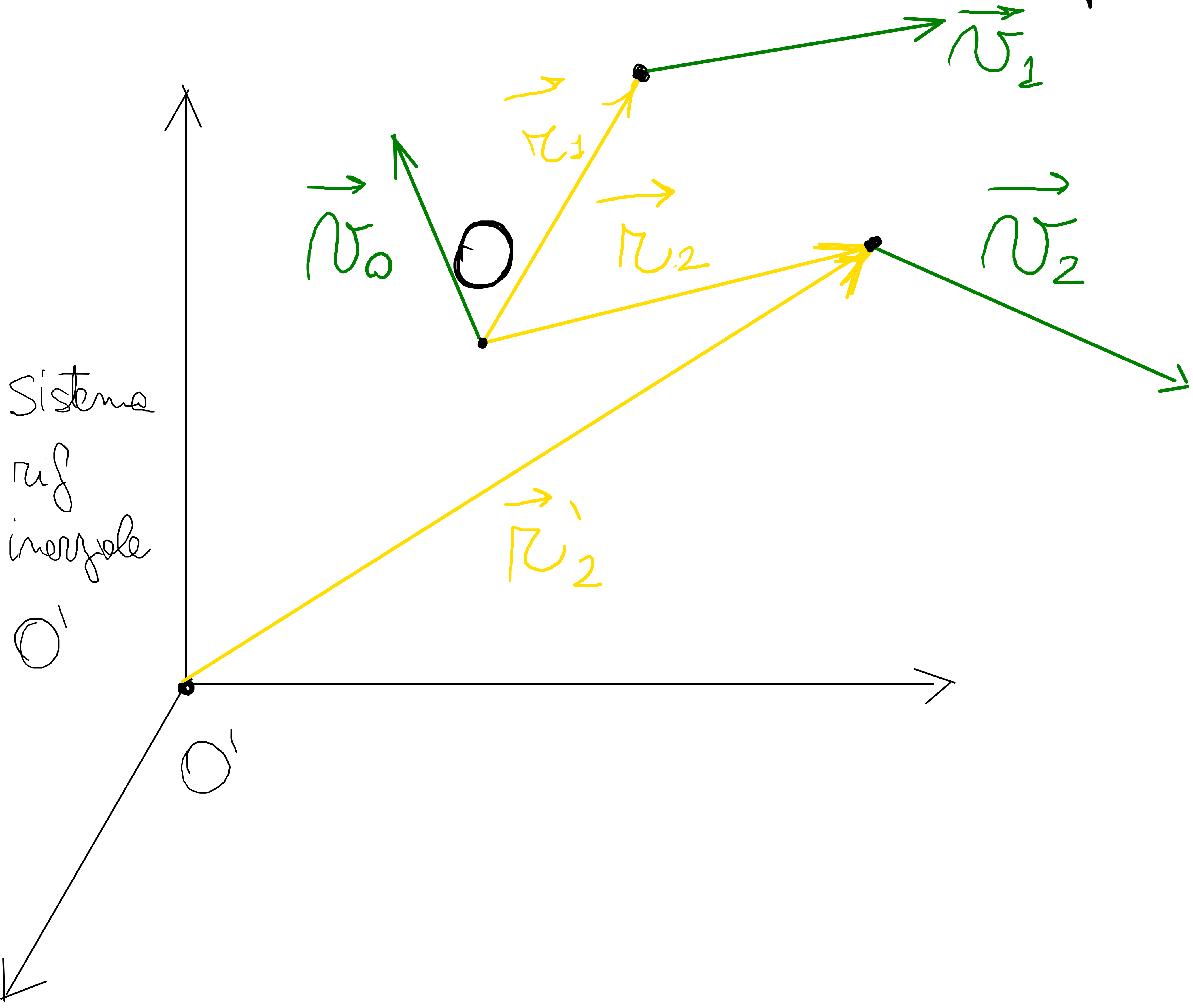
Passiamo ora da 1 corpo a N corpi



$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

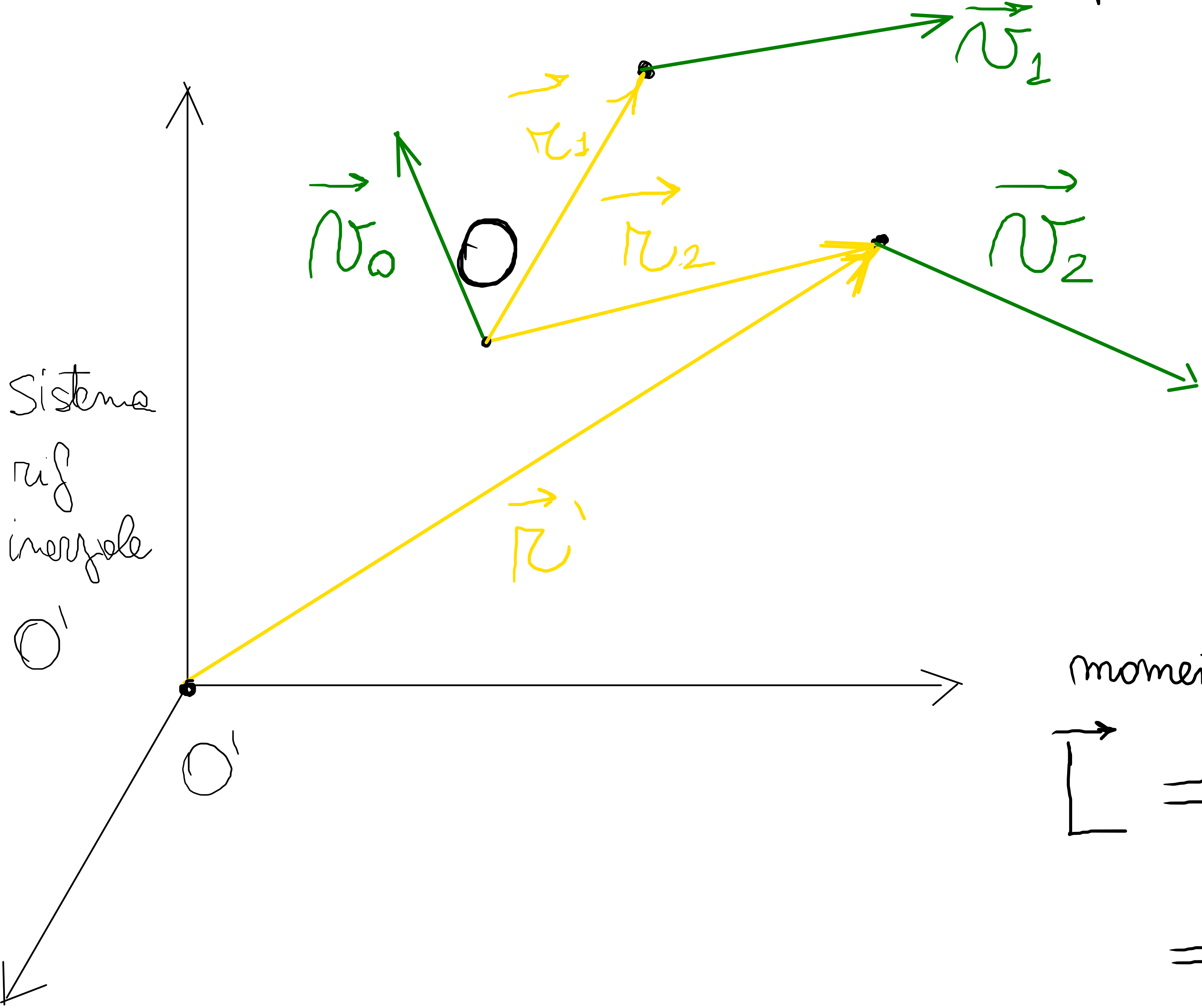
Passiamo ora da 1 corpo a N corpi



$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Passiamo ora da 1 corpo a N corpi



$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

momento angolare totale

$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i$$

$$= \sum \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right)$$

Teorema del momento angolare per sistemi di corpi

momento angolare totale

$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \right)$$

uso $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_o$

Teorema del momento angolare per sistemi di corpi

momento angolare totale

$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i = \sum \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right) \right)$$

uso $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_0$

$$= \sum \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right)$$

Teorema del momento angolare per sistemi di corpi

momento angolare totale

$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \right)$$

uso $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_0$

$$= \sum \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

$$= \sum \left[(\vec{v}_i - \vec{v}_0) \times m_i \vec{v}_i \right] + \sum \left[\vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) \right]$$

Teorema del momento angolare per sistemi di corpi

momento angolare totale

$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i = \sum \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)$$

uso $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum\left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)\right)$$

$$= \sum \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)$$

$$= \sum\left[\left(\vec{v}_i - \vec{v}_0\right) \times m_i \vec{v}_i\right] + \sum\left[\vec{r}_i \times \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i\right)\right]$$

$$= \sum \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i - v_0 \times \sum m_i \vec{v}_i + \sum r_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

$$= \sum \left[(\vec{v}_i - \vec{v}_0) \times m_i \vec{v}_i \right] + \sum \left[\vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) \right]$$

$$= \sum \left[\left(\vec{v}_i - \vec{v}_0 \right) \times m_i \vec{v}_i \right] + \sum \left[\vec{r}_i \times \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \right) \right]$$

$$= \underbrace{\sum \underbrace{\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i}_{\emptyset}}_{\emptyset} - \vec{v}_0 \times \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i}_{m \vec{v}_{cm}} + \sum \vec{r}_i \times \underbrace{m_i \underbrace{\frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{\vec{a}_i}}_{\sum \vec{F}_j = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)}}$$

$$= \sum \left[(\vec{v}_i - \vec{v}_0) \times m_i \vec{v}_i \right] + \sum \left[\vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) \right]$$

$$= \underbrace{\sum \underbrace{\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i}_{\varnothing}}_{\varnothing} - \vec{v}_0 \times \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i}_{m \vec{v}_{cm}} + \sum \vec{r}_i \times \underbrace{m_i \underbrace{\frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{\vec{a}_i}}_{\sum \vec{F}_j = \vec{F}_i}$$

$$= \vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)}$$

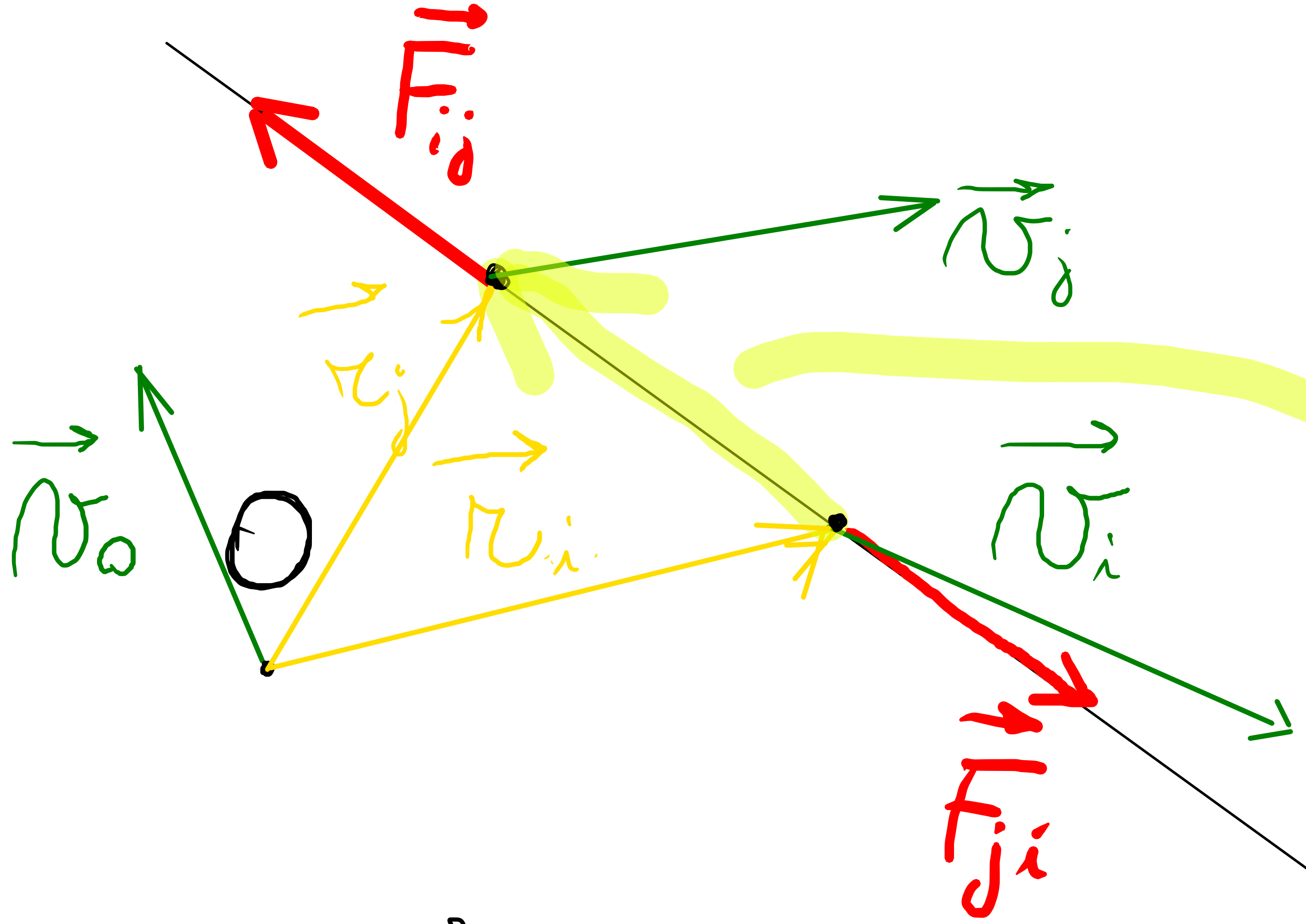
$$= - \vec{v}_0 \times m \vec{v}_{cm} + \underbrace{\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(I)}}_{\vec{M}^{(I)}} + \underbrace{\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)}}_{\vec{M}^{(E)}}$$

$$= \sum \left[(\vec{v}_i - \vec{v}_0) \times m_i \vec{v}_i \right] + \sum \left[\vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) \right]$$

$$= \underbrace{\sum \underbrace{\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i}_{\cancel{0}}}_{\cancel{0}} - \vec{v}_0 \times \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i}_{m \vec{v}_{cm}} + \sum \vec{r}_i \times \underbrace{m_i \underbrace{\frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{\vec{a}_i}}_{\sum \vec{F}_j = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)}}$$

$$= -\vec{v}_0 \times m \vec{v}_{cm} + \underbrace{\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(I)}}_{\vec{M}^{(I)}} + \underbrace{\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)}}_{\vec{M}^{(E)}}$$

a due
a due



Uso il 3° principio di Newton

$$\vec{M}_{ij}^{(I)} = \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_i \times \underbrace{\vec{F}_{ji}}_{-\vec{F}_{ij}} = \underbrace{(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \times \vec{F}_{ij}}_{\emptyset \ \forall ij}$$

$$\forall ij \quad \vec{M}_{ij}^{(I)} = 0$$

Teorema del momento angolare per sistemi

a.k.a. 2ª eq. cardinale della dinamica

Ipotesi:

S. r. i.

In generale polo O in moto

calcolo $\vec{L}$ e $\vec{M}^{(E)}$ rispetto stesso polo O

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)} - \vec{v}_O \times m\,\vec{v}_{cm}$$

Se $\quad -\vec{v}_0 \times m\,\vec{v}_{cm} = 0$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}}$$

Se $\quad -\vec{v}_0 \times m\,\vec{v}_{cm} = 0 \quad *$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}}$$

* ora vediamo i casi interessanti in cui è vero

Se $\quad -\vec{v}_0 \times m\,\vec{v}_{cm} = 0 \quad *$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}}$$

$*$

1) Polo O fisso nel s r i $\qquad \vec{v}_0 = 0$

2) c.m. in quiete nel s r i $\qquad \vec{v}_{cm} = 0$

3) $O \equiv cm \longrightarrow \vec{v}_0 = \vec{v}_{cm} \qquad \vec{v}_0 \times \vec{v}_{cm} = 0$

4) $\vec{v}_0 \parallel \vec{v}_{cm}$ $\qquad$ " $\qquad$ "

Per sistemi di corpi

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(E)} \qquad \left(= \sum \vec{F}\right) \qquad 1^a \text{ eq. cardinale}$$

$$* \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)} \qquad 2^a \text{ eq cardinale}$$

Conservazione del momento angolare $\vec{L}$

Se siamo nella situazione $*$ e se $\vec{M}^{(E)} = 0$ ☆

allora $\vec{L}$ è costante (si conserva)

Conservazione del momento angolare $\vec{L}$

Se siamo nella situazione * e se $\vec{M}^{(E)} = 0$ ☆

allora $\vec{L}$ è costante (si conserva)

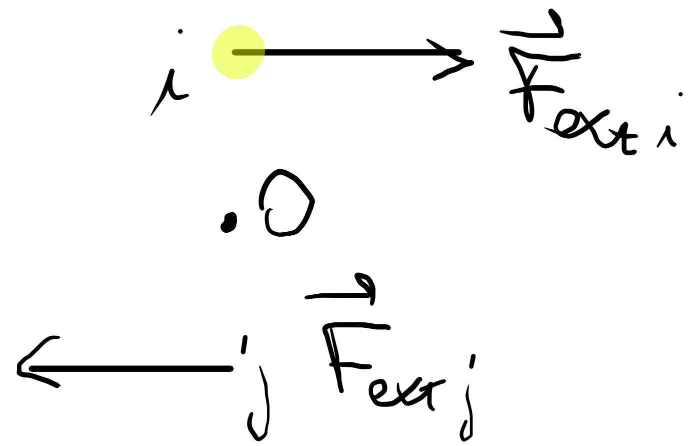
☆

1) non agiscono forze esterne, sistema isolato,

in questa situazione si conserva <u>anche</u> $\vec{P}$

Attenzione che se $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ non è detto $\vec{M}^{(E)} = 0$

esempio



$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{ext\,i} + \vec{F}_{ext\,j} = 0$$

$$\vec{M}_O \neq 0 \quad , \forall \text{ polo } O \text{ possibile}$$

☆

2) Se $\vec{M}^{(E)} = 0$ rispetto ad un ben preciso polo, anche se ci sono forze esterne

Quindi in questo caso potrebbe non conservarsi $\vec{P}$ e conservarsi $\vec{L}$

esempio sole – pianeti in orbita ellittica

polo ← momento forza gravitazionale = 0

Importanza della scelta del polo

Sistema di riferimento del cm

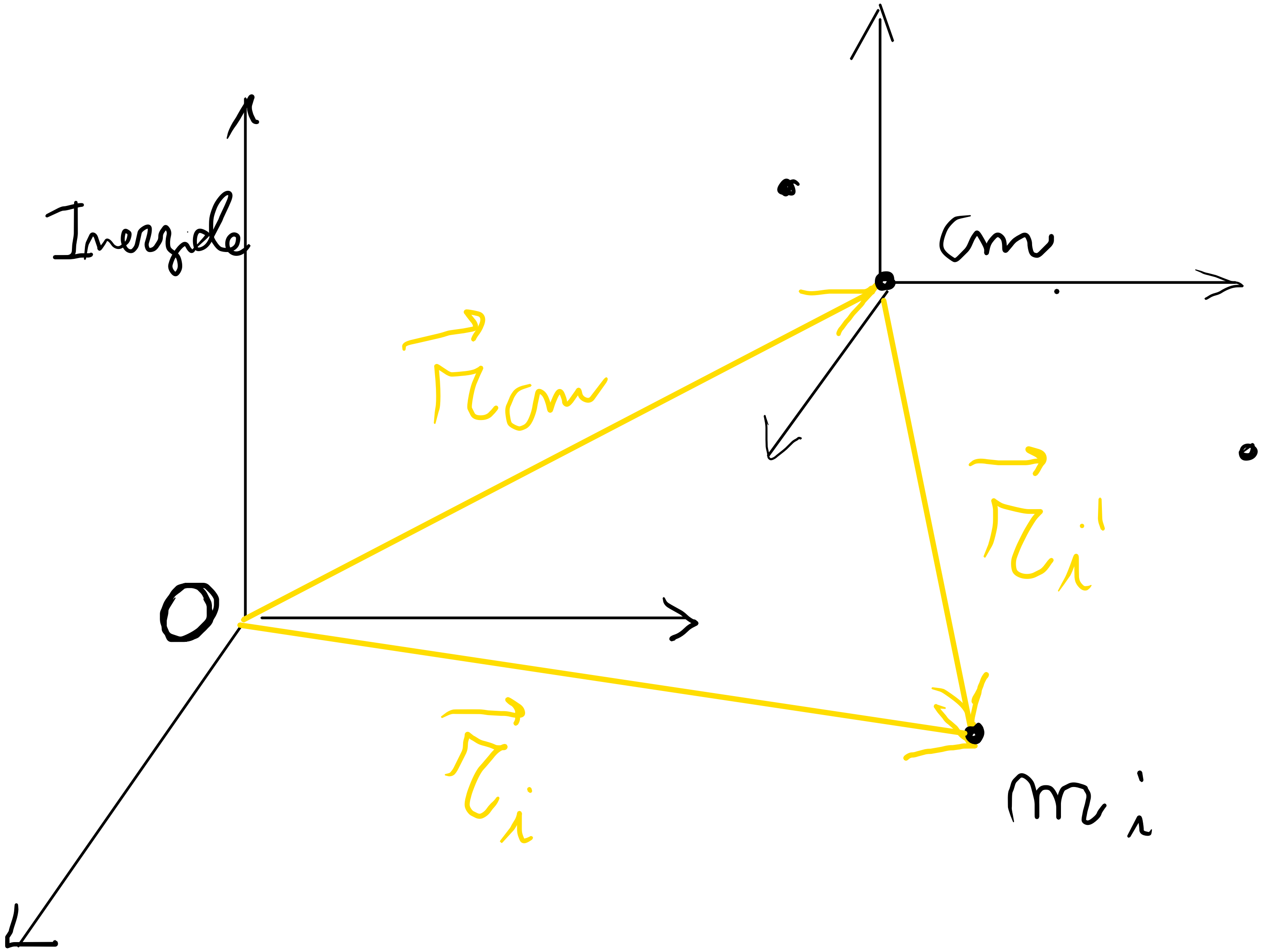
- origine nel cm

- assi del sistema di riferimento mantengono sempre la stessa direzione rispetto ad un sistema inerziale (meglio ancora se paralleli a questi).

$\longrightarrow$ si tratta in generale di un sist. rif. non inerziale a meno che $\sum \vec{F}_{ext} = 0$

$\vec{a}_{cm} = 0$

perché $\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{P}_{tot}}{m}$



apice " ' " per vettori riferiti al (= calcolati nel) sist. rif. cm

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i' \\ \vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i' \end{cases}$$

ovviamente $\vec{r}_{cm}' = 0$ $\quad \vec{v}_{cm}' = 0$

$\sum m_i \vec{r}_i' = 0$ $\quad \dfrac{\sum m \vec{v}_i'}{\sum m_i} = 0$

e quindi anche $\vec{P}' = \sum m_i \vec{v}_i' = 0$

→ anche se i singoli termini $m_i \vec{v}_i \neq 0$

Essendo un sistema non inerziale

sui singoli corpi agisce anche la forza inerziale $-m_i \vec{a}_t$

$$-m_i \vec{a}_t = -m_i \vec{a}_{cm} \longrightarrow \text{caso 2)}$$

Per ogni corpo i $\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)} - m_i \vec{a}_{cm} = m_i \vec{a}_i'$

Per il sistema complessivo di N corpi $\sum$

$$\underbrace{\sum \vec{F}_i^{(E)} + \underbrace{\sum \vec{F}_i^{(I)}}_{\emptyset} - \underbrace{\left(\sum m_i\right)\vec{a}_{cm}}_{m\,\vec{a}_{cm}}}_{\emptyset} = \sum m_i a_i'$$

per il teorema del moto del cm

$$\sum m_i \vec{a}'_i = 0$$

altra proprietà del S.R.C.M.

si poteva anche ricavare $\vec{a}'_{cm} = 0$

$$m \vec{a}'_{cm} = \sum m_i \vec{a}'_i$$

Cosa succede ai momenti totali $\vec{M}'$ e $\vec{L}'$ nel s.r.c.m?

Si dimostra che:

1) Il momento risultante $\vec{M}'$ di $\underbrace{\text{tutte le forze}}_{=\text{ esterne, interne, inerziali}}$ rispetto al c.m. (polo), calcolato nel s.r.c.m.

$$\boxed{\vec{M}' = \vec{M}'^{(E)} = \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(E)}}$$

si annullano non solo quelli delle forze interne, ma anche inerziali

2) Conseguentemente il momento angolare totale $\vec{L}' = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$ rispetto al cm calcolato nel s.r.c.m.

è t.c. $$\boxed{\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}'^{(E)}}$$

Dimostrazione di 1)

$$M'_{TOT} = \underbrace{\sum \vec{r}_i{}' \times \vec{F}_i^{(I)}}_{=0} + \underbrace{\sum \vec{r}_i{}' \times \vec{F}_i^{(E)}}_{M'^{(E)}} + \sum \vec{r}_i{}' \times \left(-m_i \vec{a}_{cm}\right)$$

$$= -\underbrace{\left(\sum m_i \vec{r}_i{}'\right)}_{=0} \times \vec{a}_{cm}$$

Teoremi di König

nel s.r.c.m. altre due proprietà

1° teorema → come posso scrivere il $\vec{L}$
nel sistema inerziale usando
le proprietà del c.m. e del
sistema di riferimento del c.m.

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \qquad \begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i' \\ \vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i' \end{cases}$$

$$\vec{L} = \sum (\vec{r}_{cm} + \vec{r}_i') \times m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i')$$

$$= \sum \vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_i' + \underbrace{\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'}_{\vec{L}'}$$

$$\vec{r}_{cm} \times \underbrace{\left(\sum m_i\right)}_{m} \vec{v}_{cm} \qquad \underbrace{\sum m_i r_i'}_{0} \times v_{cm} \qquad \vec{r}_{cm} \times \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i'}_{\emptyset}$$

$$= \vec{r}_{cm} \times m \vec{v}_{cm}$$

$$= \vec{L}_{cm} + \vec{L}'$$

2° teorema di König per l'energia cinetica

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{cm}$$

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_i' + \vec{v}_{cm}\right)^2$$

$$= \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2}_{K'} + \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2}_{\frac{1}{2}\left(\sum m_i\right) v_{cm}^2 \,=\, K_{cm}} + \underbrace{\sum \left(m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{cm}\right)}_{\left(\sum m_i v_i'\right) \cdot \vec{v}_{cm},\ \vec{P}' = 0}$$

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{cm}$$

$$K = K' + K_{cm}$$

per $\quad \vec{P} = m\,\vec{v}_{cm}$

Somma di N termini calcolati nel sistema inerziale	sistema del cm	unico termine calcolato nel sistema inerziale
$\vec{L}$ polo O $=$	$\vec{L}'$ polo cm $+$	$\vec{L}_{cm}$ polo O
$K =$	$K' +$	K_{cm}

per $\vec{P} = m\vec{v}_{cm}$

Un sistema di corpi si comporta in modo diverso rispetto al singolo corpo

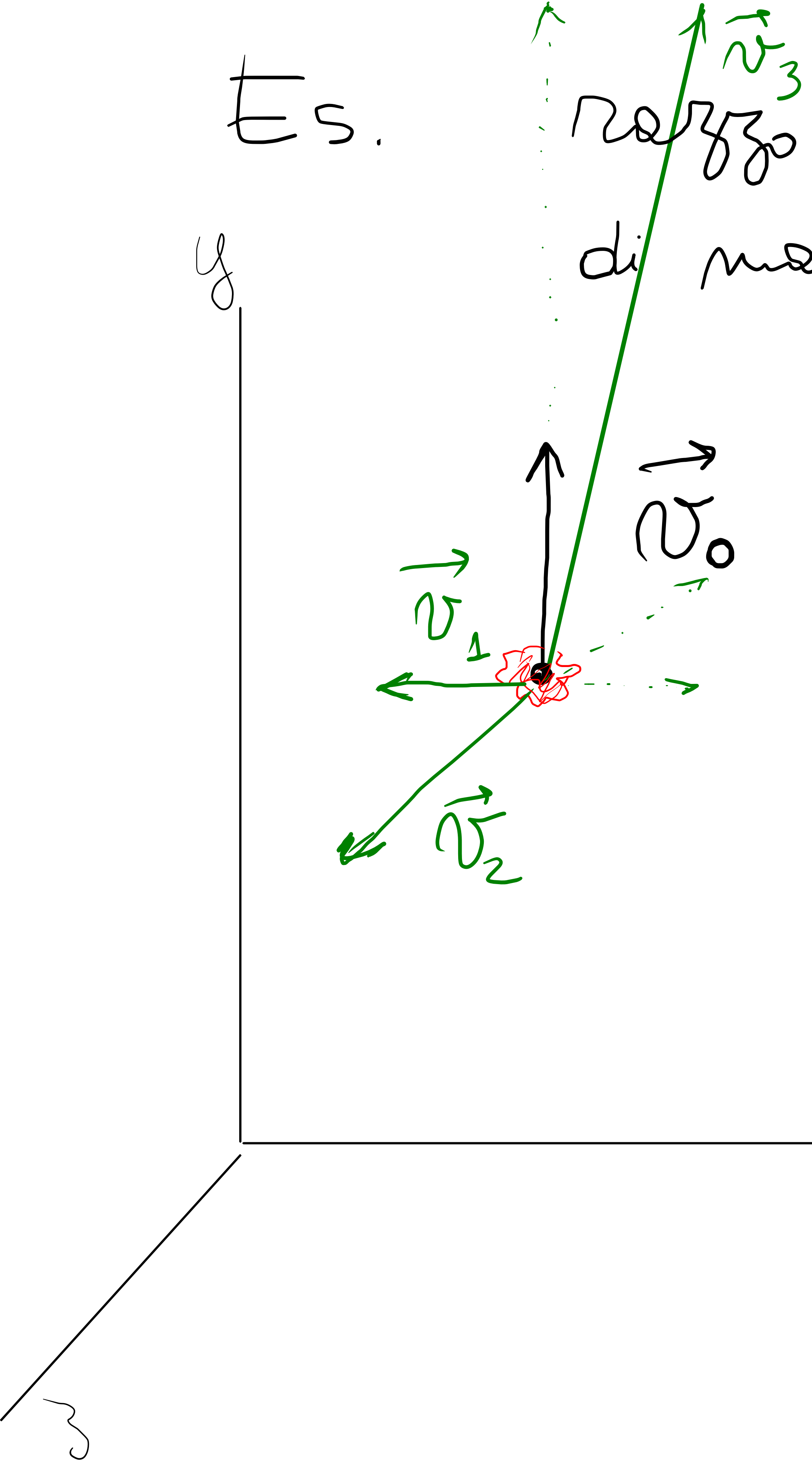
posso avere casi nulli per $\vec{P}$ e $\vec{L}$

$$\vec{P} = 0 \not\Rightarrow \vec{L} = 0$$

$$\vec{L} = 0 \not\Rightarrow \vec{P} = 0$$

Se $K_{cm} = 0$ non so se $K = 0$

Es. razzo che esplode in 3 frammenti di massa uguale



$$\vec{v}_0 = v_{0y}\hat{j} \qquad v_{0y} = 400\ m/s$$

$$\vec{v}_1 = v_{1x}\hat{i} \qquad v_{1x} = -300\ m/s$$

$$\vec{v}_2 = v_{2z}\hat{k} \qquad v_{2z} = 450\ m/s$$

$$\vec{v}_3 = ?$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \qquad \vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin}$$

$$\cancel{m}\vec{v}_0 = \frac{\cancel{m}}{3}\vec{v}_1 + \frac{\cancel{m}}{3}\vec{v}_2 + \frac{\cancel{m}}{3}\vec{v}_3$$

$$400\frac{m}{s}\hat{j} = -\frac{300}{3}\frac{m}{s}\hat{i} + \frac{450}{3}\frac{m}{s}\hat{k} + \frac{1}{3}\vec{v}_3$$

$$\vec{v}_3 = \left(300\hat{i} + 1200\hat{j} - 450\hat{k}\right) m/s$$

2) Quanta energia si sprigiona nell'esplosione $M = 3m = 9 \cdot 10^3 kg$

$$|\vec{v}_3| = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2 + v_{3z}^2} = 1320 \ m/s$$

$$K_{prima} = K_{cm} = \frac{1}{2} M v_0^2 = 0.72 \cdot 10^9 \ J$$

$$K_{dopo} \left(= K'_{dopo} + K_{cm} \right) = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = 3.05 \cdot 10^9 \ J$$

$$K_{dopo} - K_{prima} = K'_{dopo} = (3.05 - 0.72) \cdot 10^9 \ J$$

Questa è l'energia che si sprigiona nell'esplosione e che è dovuta all'azione di forze interne. Per il 2° teo. di König è anche uguale all'energia cinetica calcolata nel s.r.cm K'_{dopo}. L'energia meccanica non si conserva

Esercizio

$\vec{L}$, $\vec{L}'$, $\vec{L}_{cm}$

K , K' , K_{cm}

2 corpi

O origine s.i.

polo per $\vec{L}$ $\vec{L}_{cm}$

Esercizio

$\vec{L}$, $\vec{L}'$, $\vec{L}_{cm}$

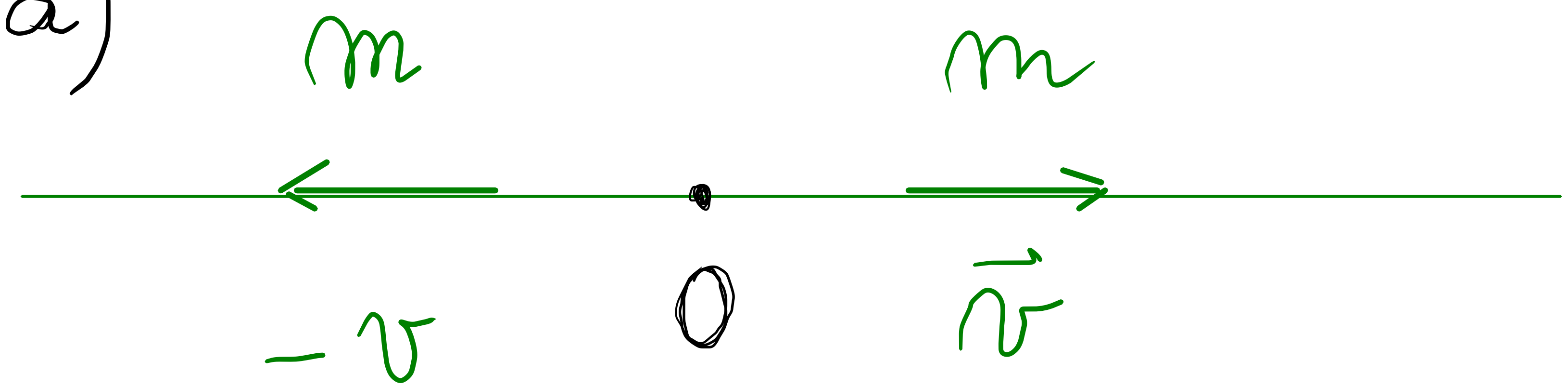
K, K', K_{cm}

2 corpi

O origine s.i.

polo per $\vec{L}$ $\vec{L}_{cm}$

a)



$cm \equiv O$

$\vec{v}_{cm} = 0$

$\vec{L} = 0$

$\vec{L}_{cm} = 0$

$\vec{L}' = 0$

$\vec{r}_i \parallel \vec{v}_i$

$\vec{r}_{cm} = 0$ $\vec{v}_{cm} = 0$

$K_{cm} = 0$

$K = K' = 2\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = m v^2$

Esercizio

$\vec{L}, \vec{L}', \vec{L}_{cm}$

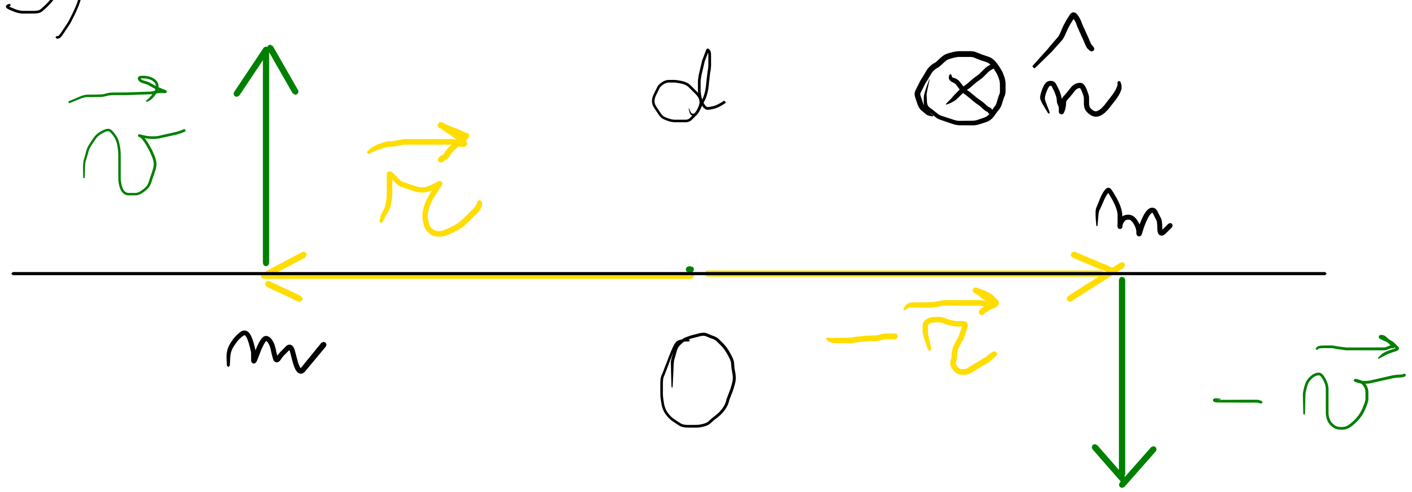
K, K', K_{cm}

2 corpi

O origine s.i.

polo per $\vec{L}$ $\vec{L}_{cm}$

b)



$cm \equiv O$

$\vec{v}_{cm} = 0$

$K_{cm} = 0$

$\vec{L}_{cm} = 0$

$$\vec{L} = \vec{L}' = \vec{r} \times m\vec{v} + (-\vec{r} \times m(-\vec{v}))$$

$$= 2\vec{r} \times m\vec{v} = \underbrace{2r}_{d} mv\,\hat{n}$$

$$d\,m\,v\,\hat{n}$$

$K = K' =$ caso (a)

Esercizio

$\vec{L}, \vec{L}', \vec{L}_{cm}$

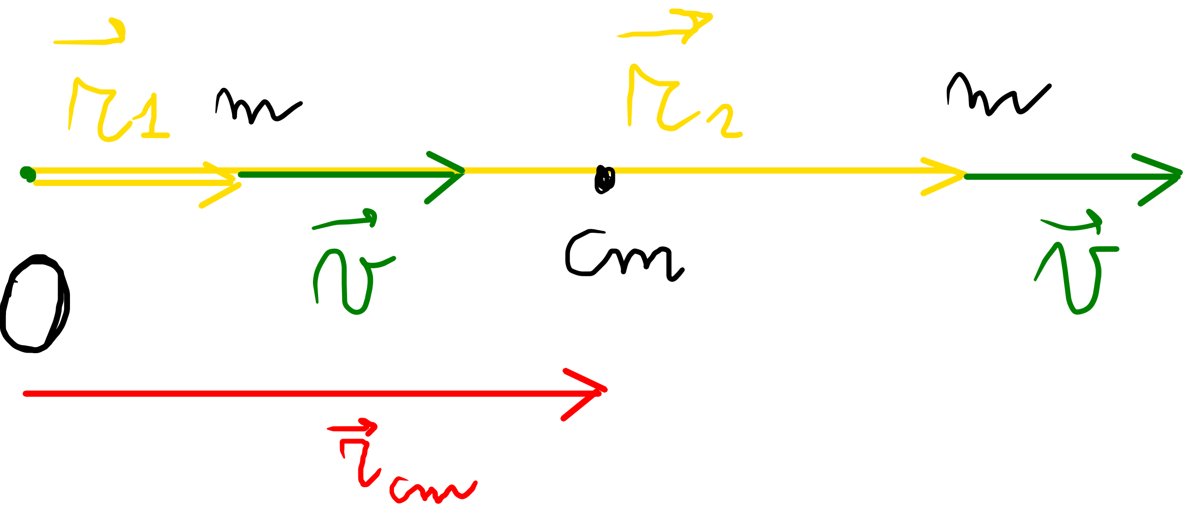
K, K', K_{cm}

2 corpi

O origine s.i.

polo per $\vec{L}$ $\vec{L}_{cm}$

c)



$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{P}}{m_{tot}} = \frac{2m\vec{v}}{2m} = \vec{v}$$

$$\vec{L}_{cm} = \vec{r}_{cm} \times \vec{P} = 0$$

$\vec{r}_{cm} \parallel \vec{v}_{cm}$

$$\underset{\vec{r}_i \parallel \vec{v}_i}{\vec{L} = 0} \longrightarrow \vec{L}' = 0$$

per König

oppure perché $\vec{v}_i' = 0$

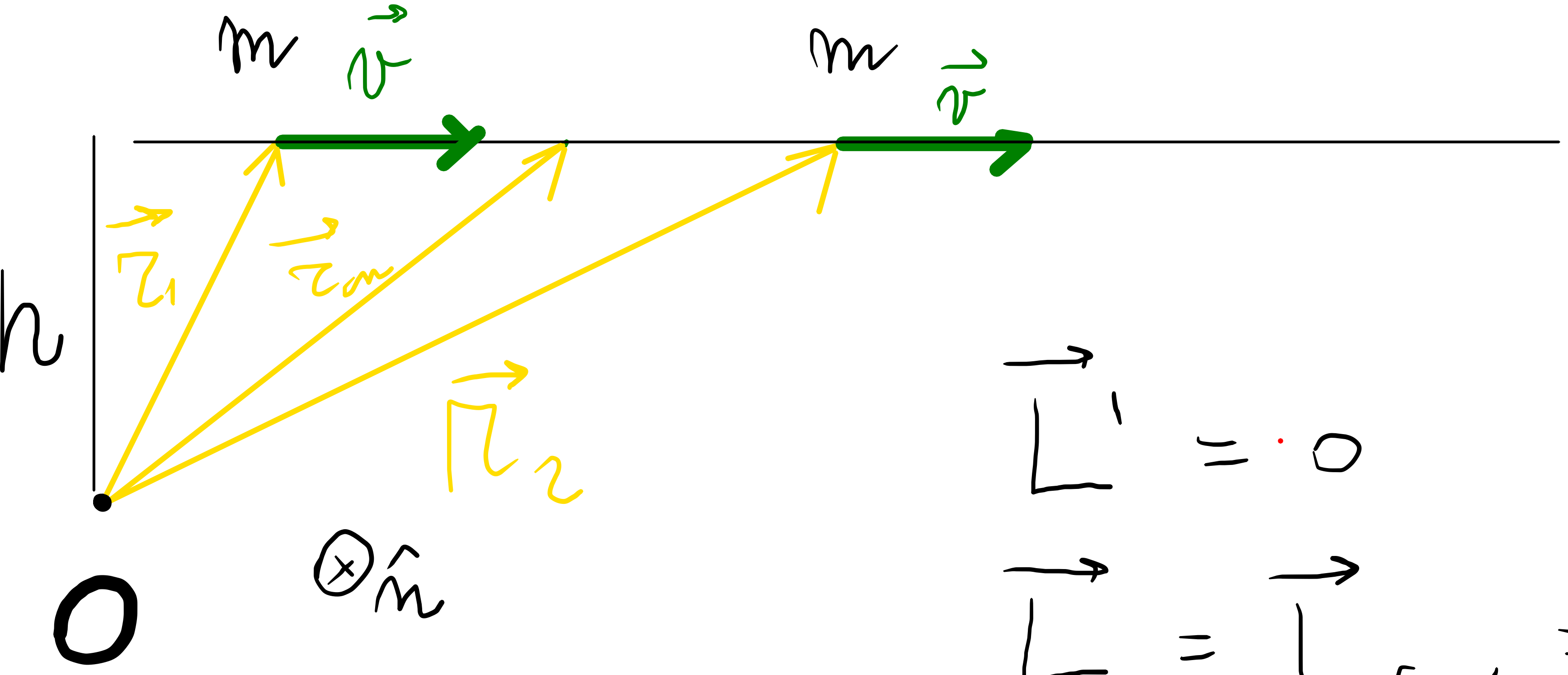
$K' = 0$ $\qquad K = K_{cm} = \frac{\cancel{2} m v^2}{\cancel{2}}$

Esercizio $\vec{L}, \vec{L}', \vec{L}_{cm}$ 2 corpi

K, K', K_{cm} O origine s.i.

polo per $\vec{L}$ $\vec{L}_{cm}$

d)



$\begin{cases} \vec{r}_{cm} \\ \vec{v}_{cm} \end{cases}$ come nel caso c)

$\vec{L}' = 0$ $\vec{v}_i' = 0$

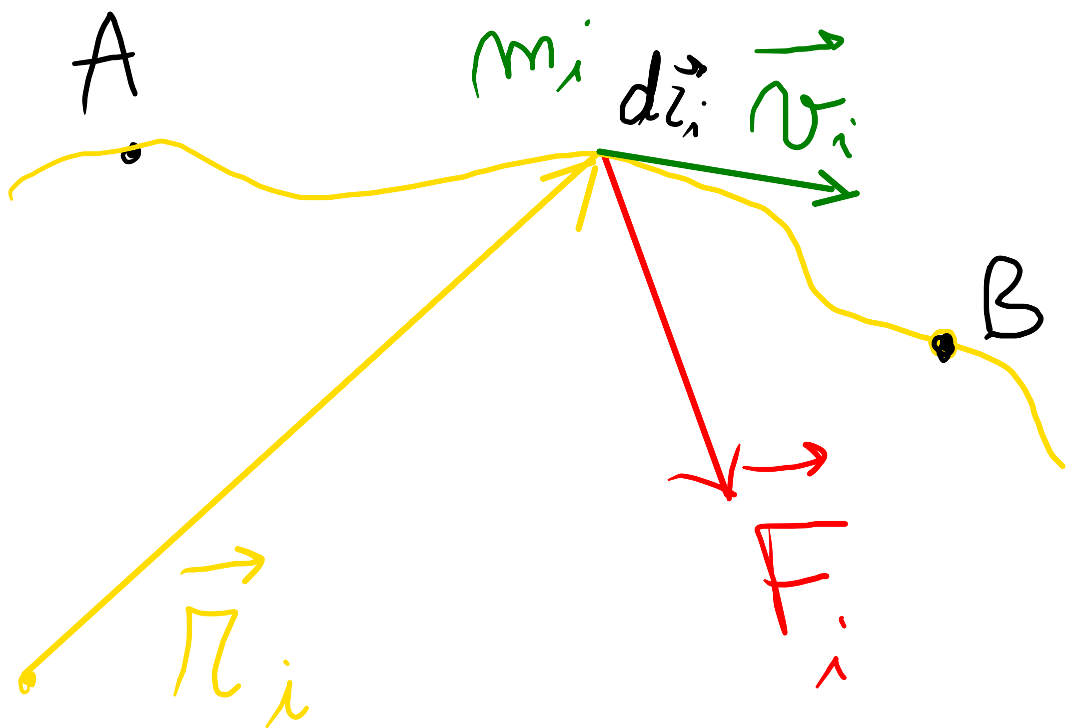
$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} = \vec{r}_{cm} \times (2m) \vec{v}_{cm} = 2hmv\hat{n}$$

K, K', K_{cm} come nel caso c)

Teorema dell'energia cinetica nei sistemi di corpi

Ipotesi S.R.I. $\qquad$ N corpi

vediamo il corpo generico "i"



$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i =$$

$$= \vec{F}_i^{(E)} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{(I)} d\vec{r}_i$$

$$W_{i\,A\to B} = \int dW_i$$

$$W_{A\to B} = \sum W_{i\,A\to B} = W^{(E)} + W^{(I)}$$

Attenzione rispetto $\vec{L}$ non scompare più il contributo delle forze interne

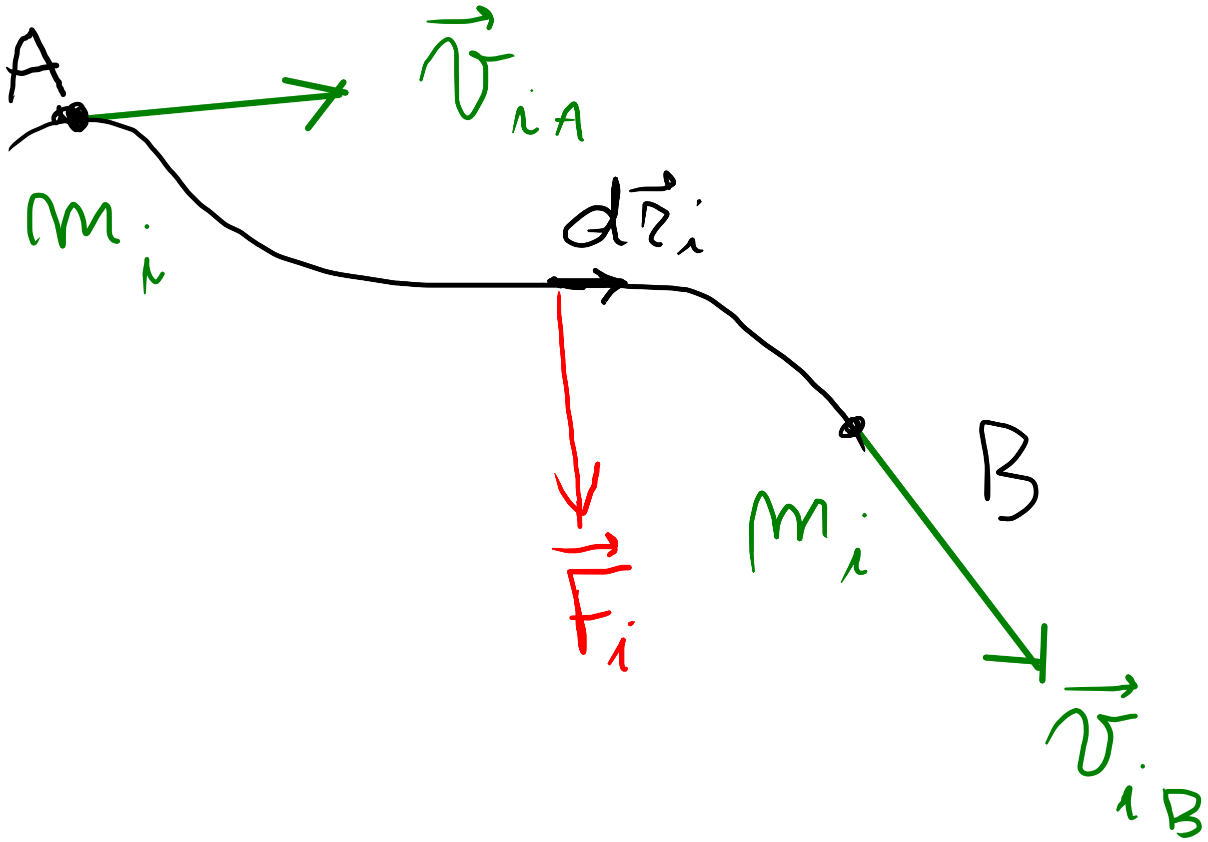
$$\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j + \underbrace{\vec{F}_{ji}}_{-\vec{F}_{ij}} d\vec{r}_i = \vec{F}_{ij} \cdot \underbrace{(d\vec{r}_j - d\vec{r}_i)}_{d(\underbrace{\vec{r}_j - \vec{r}_i}_{\text{posizione relativa di } j \text{ rispetto } i})}$$

posizione relativa di j rispetto i che cambia durante il moto

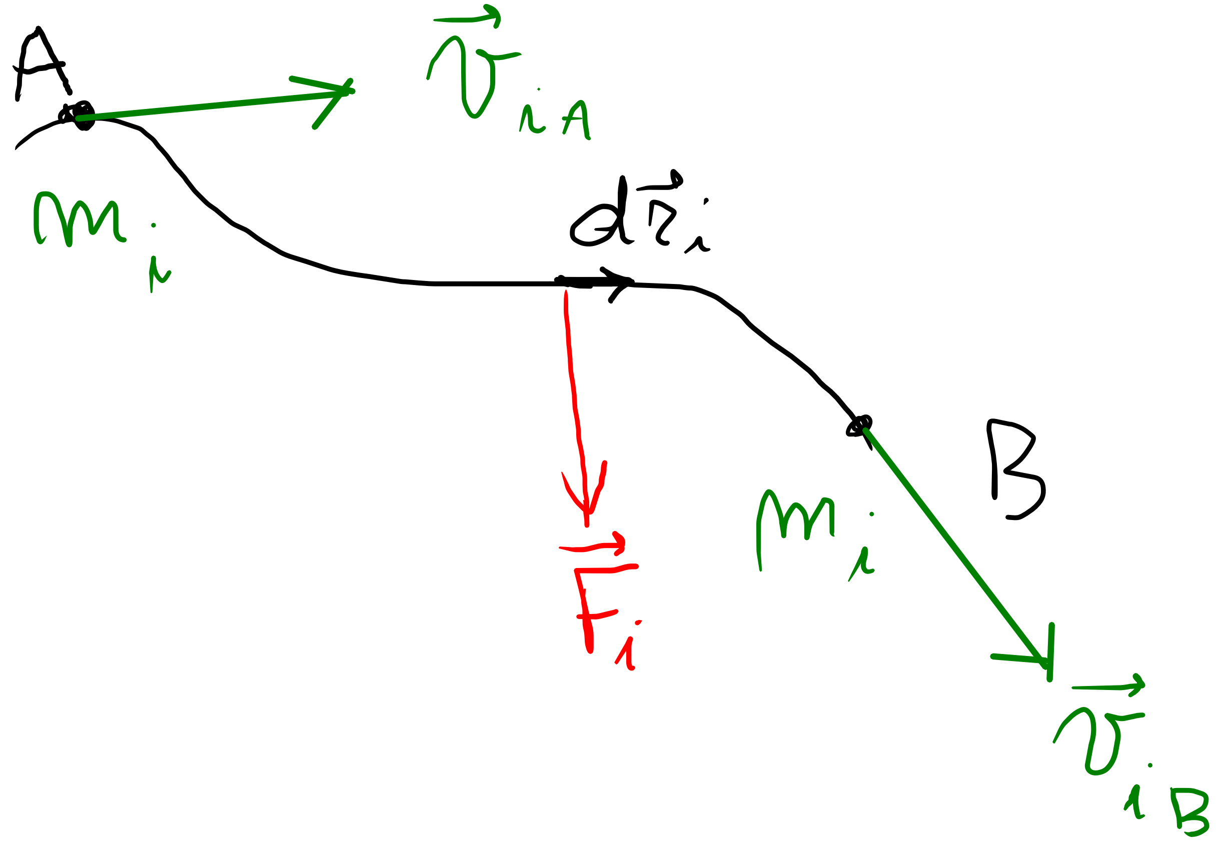
Il lavoro delle forze interne è quindi legato al cambiamento delle mutue distanze fra i corpi

$W^{(I)} = 0$ quando le distanze mutue non cambiano come nel corpo rigido

Vediamo ora cosa "produce" il lavoro totale di tutte le forze agenti sui corpi del sistema

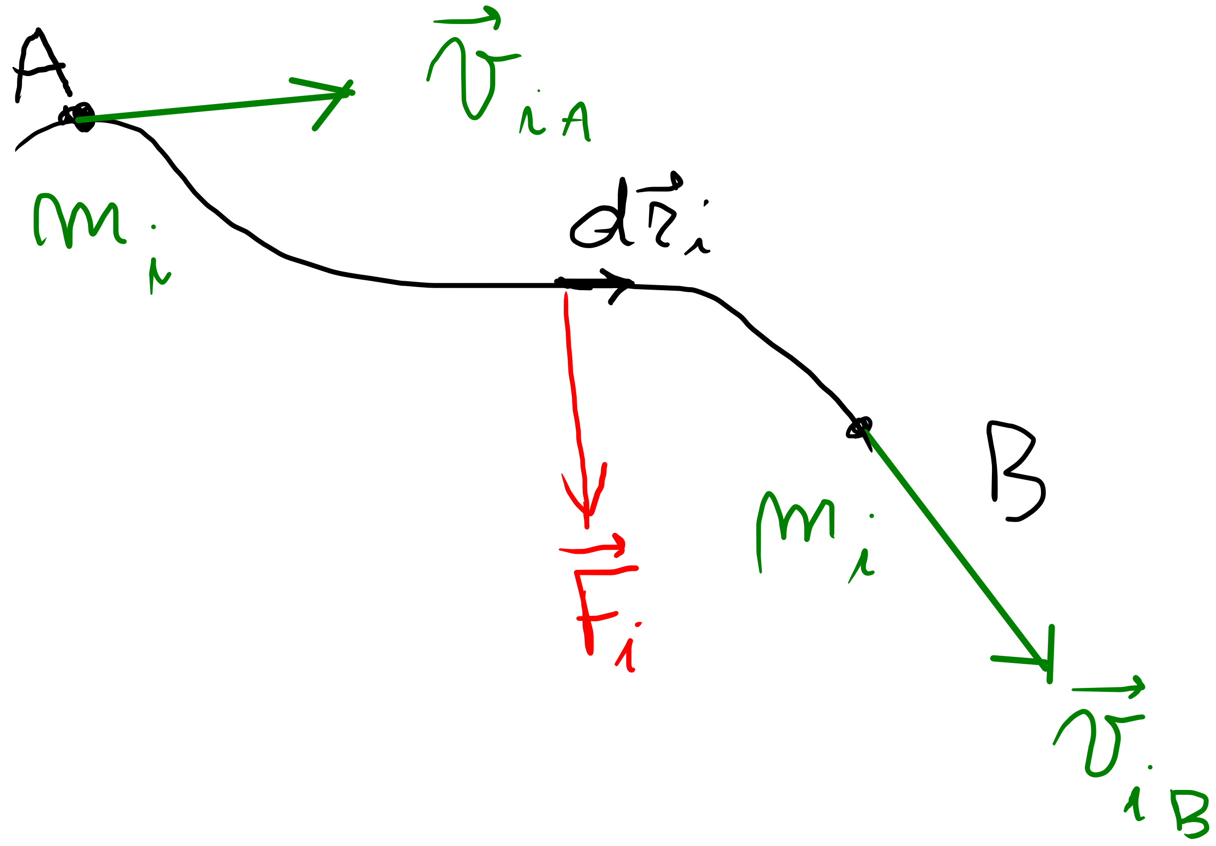


$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i$$



$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i$$

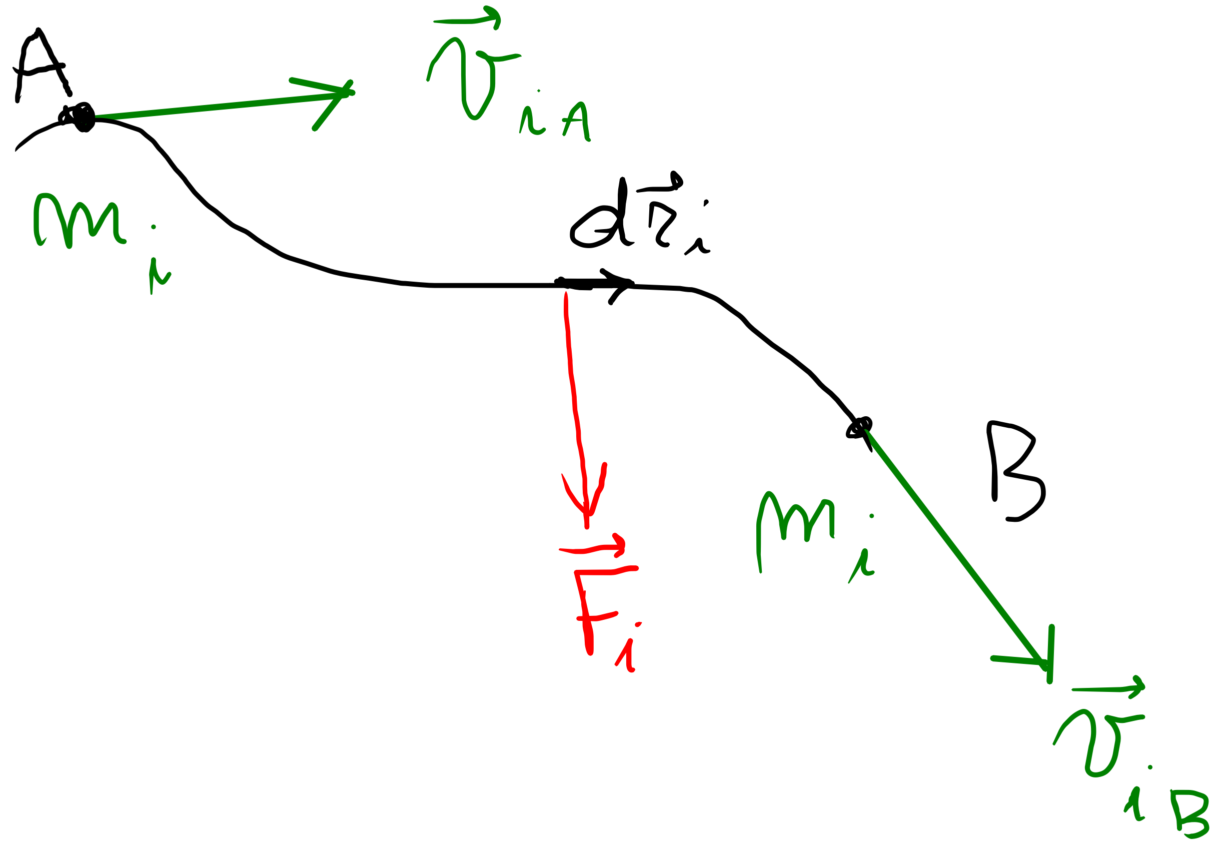
$$= m_i \, d\vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = m_i \, d\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$



$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i$$

$$= m_i \, d\vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = m_i \, d\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$= m_i \, d\left(\frac{v_i^2}{2}\right)$$

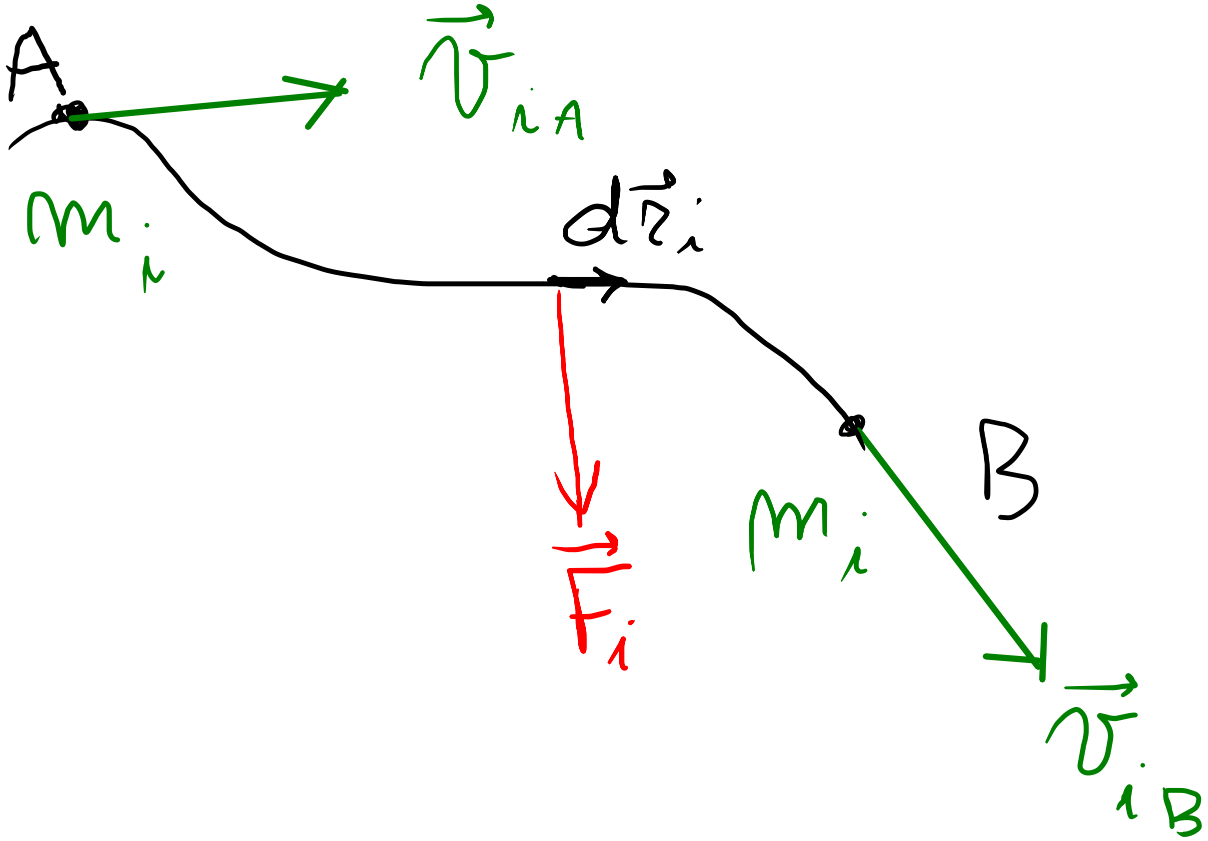


$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i$$

$$= m_i\, d\vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = m_i\, d\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$= m_i\, d\left(\frac{v_i^2}{2}\right)$$

integro sul corpo i $\quad W_i = \int_A^B dW_i = \Delta K_i = \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2$



$$dW_i = \vec F_i \cdot d\vec r_i = m_i \frac{d\vec v_i}{dt} \cdot d\vec r_i$$

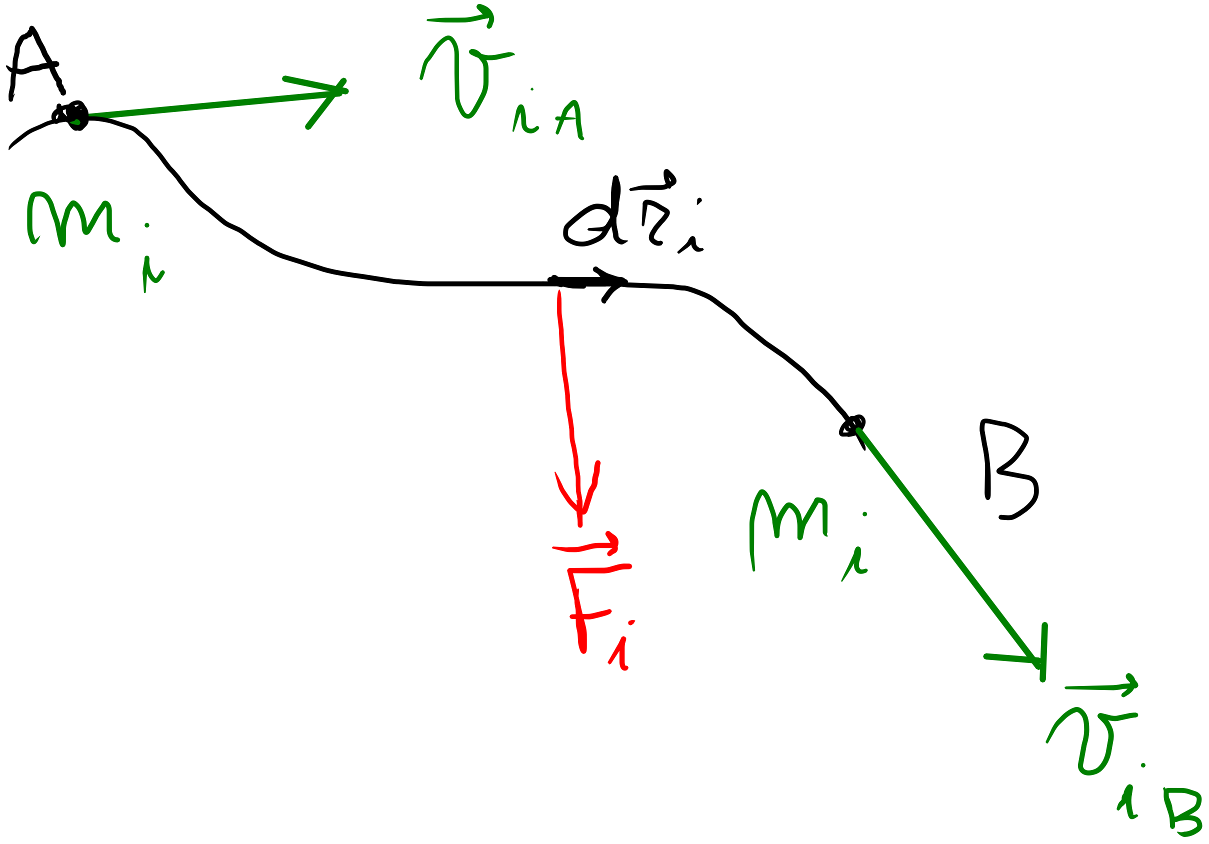
$$= m_i \, d\vec v_i \cdot \frac{d\vec r_i}{dt} = m_i \, d\vec v_i \cdot \vec v_i$$

$$= m_i \, d\left(\frac{v_i^2}{2}\right)$$

$$W_i = \int_A^B dW_i = \Delta K_i = \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2$$

Sommo su tutti

$$W = \sum W_i = \sum \Delta K_i = \underset{\text{finale}}{K_B} - \underset{\text{iniziale}}{K_A}$$



$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i$$

$$= m_i \, d\vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = m_i \, d\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$= m_i \, d\left(\frac{v_i^2}{2}\right)$$

$$W_i = \int_A^B dW_i = \Delta K_i = \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2$$

$$W = \sum W_i = \sum \Delta K_i = K_B - K_A$$

finale iniziale

Teorema

Lavoro-Energia o Energia cinetica

$$W = W^{(E)} + W^{(I)} = \Delta K$$

Inoltre se le forze interne (esterne) conservative

$$W^{(I)} = -\Delta U^{(I)}$$

$$W^{(E)} = -\Delta U^{(E)}$$

Se tutte le forze sono conservative $\Rightarrow$ cons. energia mecc.

$$W = \Delta K = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

Se solo una parte delle forze è cons.

$$E_B - E_A = (K_B + U_B) - (K_A + U_A) = W_{nc}$$

BILANCI ENERGETICI

Teorema dell'energia cinetica per sistemi

$$\Delta K = W^{(E)} + W^{(I)}$$

Inoltre se le forze interne (esterne) conservative

$$W^{(I)} = -\Delta U^{(I)}$$

$$W^{(E)} = -\Delta U^{(E)}$$

Se tutte le forze sono conservative $\Rightarrow$ cons. energia mecc.

$$W = \Delta K = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

---

se solo una parte delle forze è cons.

$$E_B - E_A = (K_B + U_B) - (K_A + U_A) = W_{nc}$$

Osservazioni:

anche in assenza di forze esterne (per es. nei sist. isolati)
non è detto che si conservi l'energia meccanica,
dipende dalla natura delle forze interne

Però, se nel processo complessivo consideriamo tutti
i possibili scambi di energia (non solo quelli meccanici)
allora l'energia totale (complessiva) si conserva

↳ 1° principio della termodinamica

Eq. cardinali della dinamica

(Cap. 13)

$$\begin{cases} \vec{R}^{(E)} = \sum \vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} \\ \vec{M}^{(E)} = \sum \vec{\tau}_{ext} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} \end{cases}$$

* termine extra

** polo

Leggi di Conservazione

1) Se $\vec{R}^{(E)} = \sum \vec{F}_{ext} = 0$ si conserva $\vec{P}$

2) " $\vec{M}^{(E)} = \sum \vec{\tau}_{ext} = 0$ " " $\vec{L}$

3) " tutte le forze sono conservative " " E

Nota a) Sono 7 leggi

b) Sono indipendenti fra di loro

quindi si possono conservare una, nessuna, tutte, qualcuna

Dinamica: quante leggi orarie?

1 corpo punt. 3 leggi orarie

N corpi punt. $3 \times N$

alcune semplificazione $\vec{P}$, $\vec{L}$, cm

e relativi teoremi