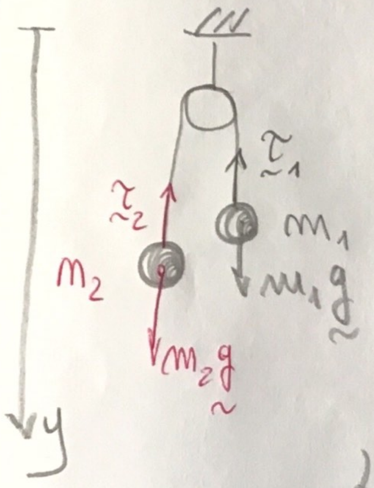
problemi con carrucole:

Si consideri una carrucola su cui può scorrere un filo a cui sono appesi due punti materiali P_1 e P_2 di masse $m_1 = 3.4\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 5.2\,\mathrm{kg}$; determinare le accelerazioni con cui si muovono P_1 e P_2 e la tensione del filo.

PROBLEMA CARRUCOLA



$|\underset{\sim}{\tau}_2| = |\underset{\sim}{\tau}_1| = \tau \qquad |\underset{\sim}{a}_1| = |\underset{\sim}{a}_2| = a$

$m_1: \; m_1 g - \tau = m_1 a_1$

$m_2: \; m_2 g - \tau = m_2 a_2$

SUPPONENDO CHE m_2 TIRI IN GIÙ

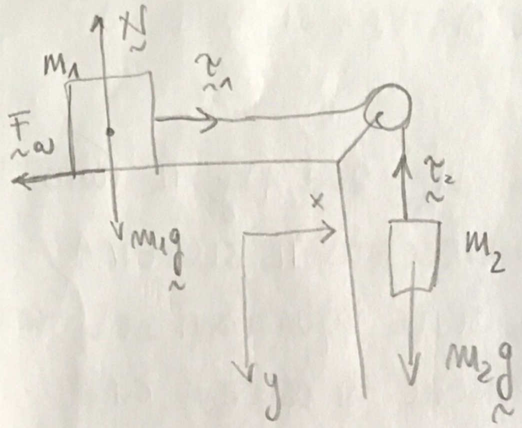
$a_2 = -a_1 = a$

$$\begin{cases} m_1 g - \tau = -m_1 a \\ m_2 g - \tau = m_2 a \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2{,}5\,\mathrm{m/s^2} \\ \tau = 42\,\mathrm{N} \end{array}$$

Si consideri un punto materiale P_1 di massa $m_1 = 4.5\,\mathrm{kg}$ appoggiato ad un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.75$ e coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.6$. A P_1, mediante un filo, che passa attraverso una carrucola, è collegato il punto materiale P_2 di massa m_2; che rimane sospeso nel vuoto; inizialmente il sistema è fermo. Determinare

① il valore minimo che deve avere m_2 perché il sistema si metta in movimento;

② l'accelerazione e la tensione del filo quando m_2 ha un valore doppio del suo valore minimo.



m_1 : $m_1 \underset{\sim}{g} + \underset{\sim}{\tau}_1 + \underset{\sim}{N} + \underset{\sim}{F}_a = m_1 \underset{\sim}{a}_1$

m_2 : $m_2 \underset{\sim}{g} + \underset{\sim}{\tau}_2 = m_2 \underset{\sim}{a}_2$

$|\underset{\sim}{\tau}_1| = |\underset{\sim}{\tau}_2| = \tau \qquad |\underset{\sim}{a}_1| = |\underset{\sim}{a}_2| = a$

m_1 su x: $\tau_1 - F_a = m_1 a$

su y: $m_1 g - N = 0 \qquad N = m_1 g$

m_2 su y: $m_2 g - \tau_2 = m_2 a$

$F_a = \mu_s N$ IL SISTEMA DIVENTA

$\tau - \mu_s m_1 g = m_1 a$ 2 EQUAZIONI

$m_2 g - \tau = m_2 a$ 2 INCOGNITE τ, a

$$a = \frac{(m_2 - \mu_s m_1)}{m_1 + m_2} g \Rightarrow a \geq 0 \iff m_2 \geq \mu_s m_1$$

SE $m_2 \geq 3,4\,kg$ il SISTEMA SI METTE IN MOTO

ASSUMENDO ORA $m_2 = 2 \cdot 3,4\,kg$ IL MOTO È CERTAMENTE INNESCATO. IL SISTEMA DELLE PROIEZIONI DELLE EQUAZIONI DEL MOTO È IL MEDESIMO PURCHÈ SI OSSERVI CHE L'ATTRITO È DINAMICO, PERCIÒ ABBIAMO μ_d AL POSTO DI μ_s.

SI OTTENGONO

$$a = 3,6\,m/s^2 \qquad \tau = 43\,N$$

Esercizio 1.10 Si consideri un cubetto di massa m ed una molla ideale di costante elastica k poggiati su di un piano orizzontale, come descritto nella figura 6. C'è attrito fra la base del cubetto e il piano e il coefficiente di attrito dinamico è μ_d. se si abbandona il cubetto in quiete appoggiato (non agganciato) alla molla compressa e la compressione iniziale è $\delta = -\Delta l = -(l - l_0)$, il cubetto comincia a muoversi (il coefficiente di attrito statico è di poco superiore a quello dinamico): di quanto si sposta complessivamente, fino a fermarsi?

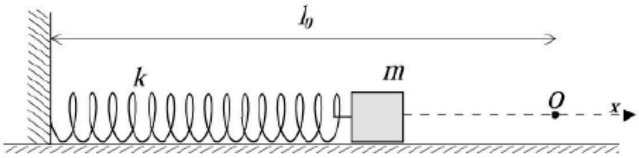
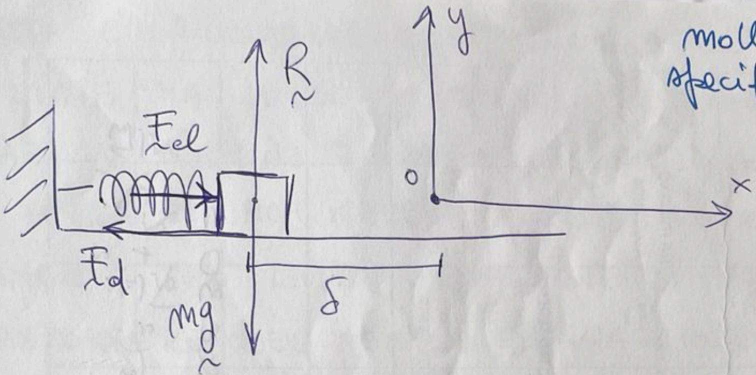


Figura 6: relativa all'esercizio **1.10**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 140\,g$; $k = 0.8\,N/m$; $\mu_d = 0.04$; $\delta = 30\,cm$.



molla rotante specifica $\underline{F}_{el} \neq \underline{F}_c$ segue con $\underline{F} = m\underline{a}$

IL MOTO VA SCOMPOSTO IN DUE PARTI:

PARTE 1 LA MOLLA ACCOMPAGNA m FINO A $x=0$

PARTE 2 DA $x=0$ IN AVANTI IL CORPO m NON INTERAGISCE PIÙ CON LA MOLLA POICHÉ @ $x=0$ LA MOLLA SMETTE DI ESSERE COMPRESSA E POICHÉ m NON È AGGANCIATO ALLA MOLLA, LA MOLLA RESTA CON L'ESTREMITÀ LIBERA IN $x=0$ E m PROCEDE

PARTE 1: EQUAZIONE DEL MOTO DI m

$$\underline{F}_d + \underline{R} + \underline{F}_{el} + m\underline{g} = m\underline{a}$$

su x: $-\mu R + k\delta = ma$ $\qquad -\mu m g + k\delta = ma$

su y: $R - mg = 0$ $\qquad R = mg$

QUESTA È LA CONFIGURAZIONE DINAMICA ALL'ISTANTE INIZIALE, MA SI DEVE PRESTARE ATTENZIONE PARTICOLARE AL TERMINE DI DINAMICA ELASTICA, INFATTI LA FORZA ELASTICA CAMBIA ISTANTANEAMENTE DAL MOMENTO CHE LA DEFORMAZIONE DIMINUISCE AL TRASCORRERE DEL TEMPO. L'EQUAZIONE DEL MOTO È QUINDI UN'EQUAZIONE CON UN TERMINE DIPENDENTE DAL TEMPO NELLA COMPONENTE ORIZZONTALE

$$-\mu m g + k x(t) = m \ddot{x}(t) \quad , \ddot{x}(t) = a$$

UNA SOLUZIONE DI QUESTA EQUAZIONE DIFFERENZIALE È $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \frac{\mu g}{\omega^2}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$

A e B SONO COSTANTI DA DETERMINARE A PARTIRE DALLE CONDIZIONI INIZIALI

$$x(0) = -0{,}30\,m \quad \dot{x}(0) = v(0) = 0$$

DALLA SECONDA CONDIZIONE SI RICAVA $B = 0$,
DALLA PRIMA CONDIZIONE SI RICAVA $A = -0{,}23\,m$
QUINDI LA SOLUZIONE È

$$x(t) = -0{,}23 \cos\omega t - \frac{\mu g}{\omega^2}$$

@ t^* $x(t^*) = 0$ CIOÈ LA MASSA m È ACCOMPAGNATA DALLA MOLLA, SPINTA DALLA MOLLA FINO ALLA POSIZIONE $x = 0$ IN CUI LA MOLLA NON È PIÙ DEFORMATA, QUINDI CESSA DI AGIRE SULLA

MASSA m

CALCOLO DI t^*

$$0 = -0{,}23\cos\omega t^* - \frac{\mu g}{\omega^2} \Rightarrow t^* = 0{,}53\,s$$

$$v(t^*) = \dot{x}(t^*) = 0{,}23\,\omega \sin\omega t^* \cong 0{,}52\,m/s$$

QUESTA VELOCITÀ È QUELLA CON LA QUALE LA MASSA m INIZIA IL SUO MOTO MODIFICATO DINAMICAMENTE: LA SOLA FORZA CHE AGISCE SULLA m A PARTIRE DA t^*, CIOÈ DA QUANDO LA MASSA SI TROVA NELLA POSIZIONE $x=0$, È L'ATTRITO DINAMICO.

QUINDI LA EQUAZIONE DEL MOTO DA $x=0$ È

$$-\mu m g = m a \Rightarrow a = -\mu g$$

E

$$x(t) = x(t^*) + v(t^*)t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x(t) = 0{,}52\,t_f - \frac{1}{2}\mu g t^2 \quad @\, t_f \quad v(t_f) = 0$$

$$v(t_f) = v(t^*) - \mu g t_f \Rightarrow t_f = 1{,}33\,s$$

$$x(t_f) = 0{,}347\,m \cong 0{,}35\,m \Rightarrow x_{TOT} = 0{,}35 + 0{,}30 \cong 0{,}65\,m$$

Un blocchetto (puntiforme) di massa m si muove con velocità $\vec{v}_0$ su un piano orizzontale liscio (è trascurabile l'attrito). Da un certo istante in poi il blocco si viene a trovare (vedi la figura 9) sopra un blocco di massa M, inizialmente fermo, che a sua volta può scorrere su un piano orizzontale liscio. Tra i due blocchi c'è attrito e il coefficiente di attrito dinamico fra le superfici è μ_d. Il blocco di massa M ha una lunghezza molto maggiore di quella del blocchetto di massa m e sufficiente affinché quest'ultimo non cada. Determinare:

a) la velocità comune dei due blocchi, dopo che la loro velocità relativa si è annullata;

b) la lunghezza del percorso che il blocchetto di massa m compie sul blocco di massa M prima di fermarsi;

c) il tempo necessario perché questo avvenga.

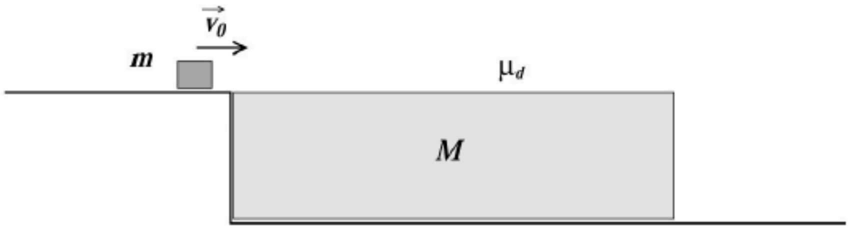
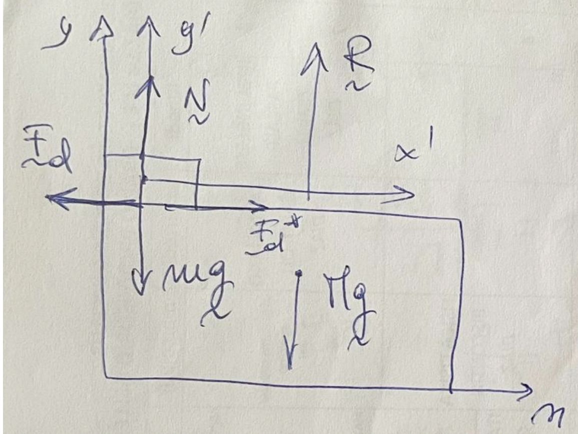


Figura 9: relativa all'esercizio **1.16**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 100\,g$; $|\vec{v}_0| = 1.5\,m/s$; $M = 500\,g$; $\mu_d = 0.15$.

@ $t=0$ INIZIA IL MOTO di m su M



SCRIVIAMO LE EQUAZIONI DEL MOTO PER CIASCUN BLOCCO

m: $m\vec{g} + \vec{F}_d + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}'$

M: $m\vec{g} + \vec{F}_d^* + \vec{R} + M\vec{g} = M\vec{a}_{tr}$

queste equazioni vanno proiettate nei sistemi di riferimento nel sistema di M osservando che $\vec{F}_d^* = -\vec{F}_d$

su x : $F_d^* = M a_{tr}$ $\quad -F_d = M a_{tr}$

su y : $R - mg - Mg = 0$ $\quad R = mg + Mg$

su x' : $-\mu_d N - m a_{tr} = m a'$ $\quad -\mu_d mg - m a_{tr} = m a'$

su y' : $N - mg = 0$ $\quad N = mg$

$-F_d = -(-\mu_d mg) = \mu_d mg$ sostituendo $a_{tr} = \frac{\mu_d mg}{M}$

sostituendo in x'

$$-\mu_d \cancel{m} g - \cancel{m} \frac{\mu_d m g}{M} = \cancel{m} a' \qquad a' = -\mu_d g \left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

ciò ci permette di calcolare $v' = v_0 + a't$

t^* è l'istante: $v'(t^*) = 0$ @ t^* $v_{ass} = v_{tr}$

$v_{tr} = a_{tr} t \Rightarrow v_{tr}(t^*) = a_{tr} t^*$

$x'(t^*) = \cancel{x'(0)}^{\,0} + v_0(t^*) + \frac{1}{2} a' t^{*2}$

$-\mu_d mg - m a_{tr} = m a'$

$\mu_d mg = M a_{tr} \Rightarrow a_{tr} = \frac{\mu_d m g}{M}$

$$-\mu_d \cancel{m} g - \frac{m^{\cancel{2}} \mu_d g}{M} = \cancel{m} a' \Rightarrow a' = \mu_d g \left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

$a' = 0{,}15 \cdot 9{,}81 \left(1 + \frac{0.1}{0.5}\right) = 0{,}15 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}2$

$0 = v'(t^*) = v_0 + a't^* \Rightarrow t^* = \frac{1{,}5}{a'} = 0{,}85\,s$

$v_a = v' + v_{tr}$ $\quad v_{tr} = a_{tr} \cdot t^* = 0{,}25\ m/s$

$x'(t) = x'(0) + v_0 t + \frac{1}{2} a' t^2$

$x'(t^*) = 1{,}5 \cdot 0{,}85 + \frac{1}{2} \mu_d g (1.2)(0{,}85)^2 = 0{,}637\,m$

$1{,}275 \quad - 0{,}63789 \quad \simeq 63$ cm