

Fisica Generale

*Misure di grandezze fisiche
e incertezze di misura*

Lezione 2

Facoltà di Ingegneria

Livio Lanceri



Misura ed "errori" di misura

- *Tutte le misure sono affette da incertezze ("errori")*
 - Una misura non ha significato se non e' accompagnata da
 - unita` di misura
 - **stima dell'incertezza**
 - Criteri per assegnare un'incertezza a *misure* fatte a partire da letture *non ripetute* di *strumenti tarati*: lezione di oggi
 - *Misure dirette*
 - *Misure indirette*: "propagazione" degli errori
 - Se possibile, conviene ripetere la misura !
 - Nella *prossima* lezione: come ridurre l'incertezza studiando la distribuzione dei risultati ottenuti in *misure ripetute*



1. Premesse

Alcune definizioni



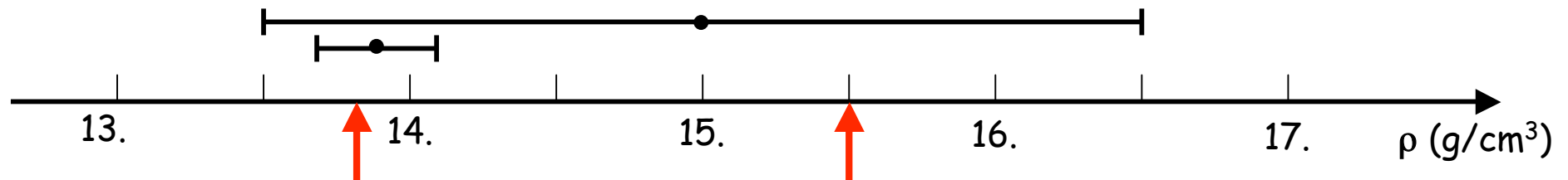
Perche' stimare le incertezze ?

• Esempio 1: una misura di g

- Dalle oscillazioni di un pendolo: $g = 9.70 \text{ m/s}^2$ (valore accettato: 9.81)
 - E' una buona misura, anche se non molto precisa ? $\delta g = \pm 0.15 \text{ m/s}^2$
 - E' una scoperta storica (quinta forza? anti-gravita' ?) ? $\delta g = \pm 0.01 \text{ m/s}^2$

• Esempio 2: una misura di densita'

- Oro: $\rho = 15.5 \text{ g/cm}^3$ Lega non preziosa: $\rho = 13.8 \text{ g/cm}^3$
- I esperto: misura 15 g/cm^3 , intervallo di confidenza da 13.5 a 16.5 g/cm^3
- II esperto: misura 13.9 g/cm^3 , intervallo di confidenza da 13.7 a 14.1 g/cm^3
 - Le due misure sono compatibili l'una con l'altra ?
 - L'oggetto considerato e' prezioso o di valore trascurabile ?
(cioe': la densita' e' compatibile o no con quella nota dell'oro?)



Errori "accidentali" e "sistematici"

Errori "accidentali" o "statistici" ("*precisione*" della misura)

- Dovuti al concorso di un insieme di piccole perturbazioni non prevedibili e non controllabili, in parte positive e in parte negative
- possono essere analizzati con metodi statistici generali a partire dai risultati di misure ripetute

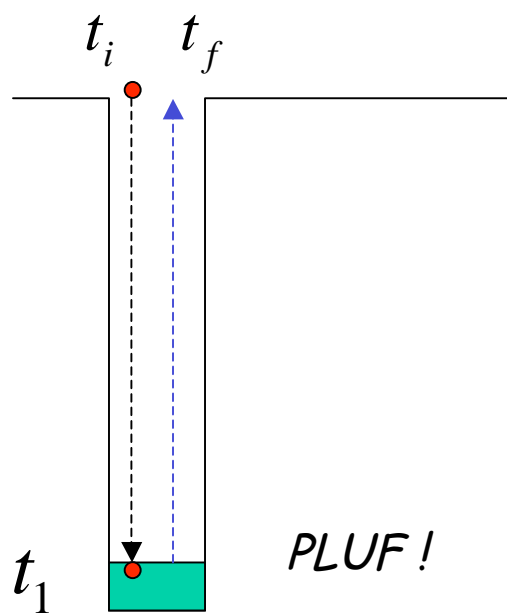
Errori "sistematici" ("*accuratezza*" della misura)

- Si ripresentano in misure ripetute con il medesimo valore e segno: perturbano il risultato sempre nello stesso verso (sempre in eccesso o sempre in difetto)
- non esistono regole generali: vanno individuati e ove possibile corretti caso per caso, attraverso una attenta analisi delle condizioni ambientali, del metodo di misura e delle caratteristiche della strumentazione



Errore sistematico: un esempio

- **Misura indiretta della profondità h di un pozzo**
 - Profondità h dalla misura del tempo t impiegato da un sasso ad arrivare in fondo al pozzo
 - Tempo t (e quindi h) sovrastimato sistematicamente se:
 - "start" = istante t_i in cui il sasso viene lasciato cadere
 - "stop" = istante t_f in cui arriva in superficie il suono (PLUF !)



$$t_i = 0.0 \text{ s}; \quad t_f = 2.5 \text{ s}$$

$$h = \frac{1}{2} g (t_f - t_i)^2 \approx 31 \text{ m}$$

Il tempo impiegato dal suono per percorrere 31m

Dal fondo ($t=t_1$) alla superficie ($t=t_f$) è all'incirca:

$$\delta t = t_f - t_1 \cong \frac{31 \text{ m}}{330 \text{ m/s}} = 0.1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta t}{t_f - t_i} = \frac{0.1}{2.5} = 0.04 = 4\%$$

Di quanto si sovrastima h se t è sovrastimato del 4% ?



Un bravo sperimentatore...

- Adotta strumenti e procedure che forniscano la **precisione** richiesta (cioè l'**errore statistico** richiesto)
- Si assicura che, fatte le opportune correzioni per gli effetti sistematici noti, il residuo errore sistematico sia inferiore a quello statistico



Come rappresentare le incertezze?

- *La Migliore Stima* (x_m) \pm *Incertezza* (δx)

$$X = x_m \pm \delta x$$

- *L'intervallo* ($x_m - \delta x, x_m + \delta x$) *esprime*:
 - la confidenza dello sperimentatore nel fatto che il valore "vero" della grandezza misurata sia compreso nell'intervallo (o piuttosto: le aspettative sui risultati di future misure di precisione comparabile)
 - In misure semplici: la stima prudentiale ("errore massimo") corrisponde in pratica alla "certezza" che la grandezza misurata sia compresa nell'intervallo dichiarato
 - In misure più raffinate (p.es. ripetute): all'intervallo viene associato un contenuto di "probabilità", che discuteremo nella prossima lezione



Cifre significative

- **Regola per le incertezze**

- Le incertezze di misura dovrebbero (quasi) sempre essere arrotondate ad una cifra significativa
- (Possibile eccezione se l'incertezza ha come prima cifra significativa 1 o 2)

$$g = 9.82 \pm 0.02385 \text{ m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad g = 9.82 \pm 0.02 \text{ m/s}^2$$

(oppure: $g = 9.820 \pm 0.024 \text{ m/s}^2$)

- **Regola per la miglior stima (valore centrale)**

- L'ultima cifra significativa nella migliore stima di un risultato sperimentale dovrebbe essere dello stesso ordine di grandezza (cioè nella stessa posizione decimale) dell'incertezza corrispondente

$$v = 6051.78 \pm 31 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad v = 6050 \pm 30 \text{ m/s}$$

(oppure: $v = 6052 \pm 31 \text{ m/s}$)



Cifre significative - regole di calcolo

- *Somme e sottrazioni*

- Nel risultato compaiono solo le cifre nelle posizioni decimali in cui entrambi gli operandi hanno cifre; ad esempio:

$$5.2 + 3.1 = 8.3 \quad 6.843 + 1.2 = 8.0 \quad 6.843 + 0.001 = 6.844$$

$$5 \times 10^2 - 4 = 5 \times 10^2 \quad 5.00 \times 10^2 - 4 = 4.96 \times 10^2$$

- *Prodotti e quozienti*

- Il risultato ha lo stesso numero di cifre significative dell'operando che ne ha di meno; ad esempio:

$$5.2 \times 3.1 = 16. \quad 5.243 \times 3.1 = 16. \quad 5.243 \times 0.0031 = 0.016$$

$$\frac{37}{9} = 4 \quad \frac{37}{9.1} = 4.1$$

- *Conviene usare la notazione scientifica, non ambigua*

$$500 \quad ?(1 \text{ o } 3 \text{ cifre signif.}) \quad 5 \times 10^2 \text{ (1 cifra signif.)} \quad 5.00 \times 10^2 \text{ (3 cifre signif.)}$$



Errori assoluti e relativi

- **Errore (incertezza) assoluto**

- Def. $\varepsilon_a = |\delta x|$

- Esempio $\delta x = 2 \text{ mm} \Rightarrow \varepsilon_a = 2 \text{ mm}$

- **Errore relativo** (adimensionale!)

- Def. $\varepsilon_r = |\delta x|/|x_m|$

- Esempio $x_m = 1.327 \text{ m} \Rightarrow \varepsilon_r = 1.5 \times 10^{-3}$

- **Errore percentuale** (adimensionale!)

- Def. $\varepsilon_{\%} = 100 \times |\delta x|/|x_m| \quad (\%)$

- esempio $\Rightarrow \varepsilon_{\%} = 0.15 \%$

NB: spesso l'errore relativo è quello che conta



2. Misure non ripetute dirette

*Regole per la stima
dell'errore massimo*



Misure non ripetute dirette: errore "massimo"

- **Misura con strumento tarato**

- Analogico: costante di lettura c
 $c = 1/\sigma$ ($\sigma =$ sensibilita`)
- Digitale: risoluzione r

- **Errore massimo δx**

- Errore massimo assoluto:

$$\delta x = c \quad (\delta x = 2c)$$

$$\delta x = r \quad (\delta x = 2r)$$

- Errore massimo relativo

$$\delta x/|x|$$

- Errore massimo percentuale

$$100 \delta x/|x|$$

- **NB: "massimo"** = stima prudente: riteniamo che includa i piu` grandi errori accidentali possibili

- **Esempio:**

Bilancia analogica di sensibilita`

$$\sigma = 20 \text{ div/g}$$

Misura di una massa: migliore stima

$$m = 12.32 \text{ g}$$

$$\delta m = c = 1/\sigma = 0.05 \text{ g}$$

$$\delta m/m = 0.05/12.32 = 0.004$$

$$100 (\delta m/m) = 0.4 \%$$



3. Misure non ripetute indirette

*Regole per la
"propagazione dell' errore massimo"*



Misure indirette, non ripetute: "propagazione" ?

"Propagazione degli errori massimi"

Qualche esempio...

Incertezza in una **funzione di una sola variabile?**

$$q = f(x)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Incertezza in **somme e differenze?**

$$q = u \pm v$$

Incertezza in **prodotti e quozienti?**

$$q = uv \quad q = \frac{u}{v}$$

$$S = ab \quad v = \frac{x}{t}$$

Incertezza in una **potenza?**

$$q = x^n$$

$$V = L^3$$

Caso generale: funzione arbitraria?

$$q = f(u, v, w, \dots)$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h}$$



Propagazione: funzione di una variabile

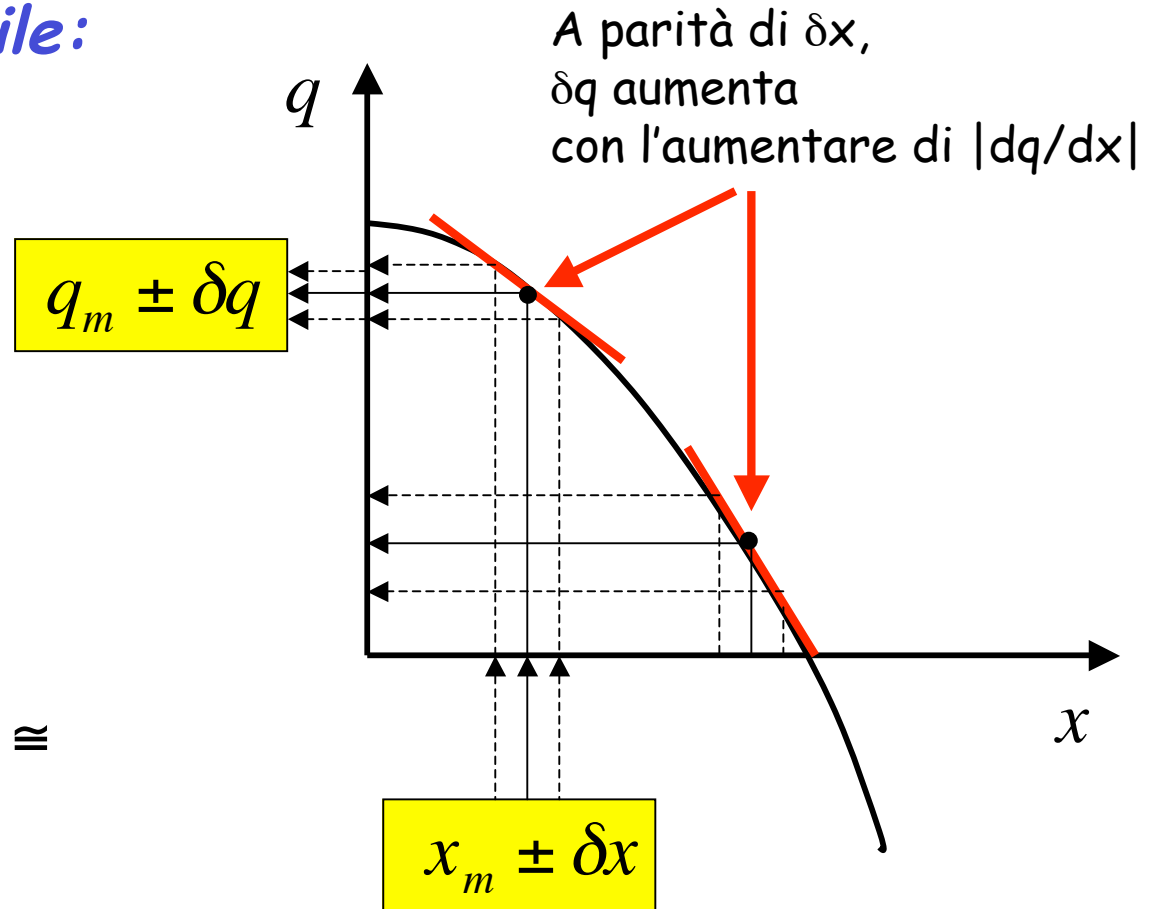
Funzione di una variabile:

$$q = q(x) \quad x = x_m \pm \delta x$$

$$q_m = q(x_m)$$
$$\delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right|_{x=x_m} \delta x$$

Giustificazione:

$$\delta q = |q(x_m + \delta x) - q(x)| \cong$$
$$\cong \left| \frac{dq}{dx} \right|_{x=x_m} \delta x$$



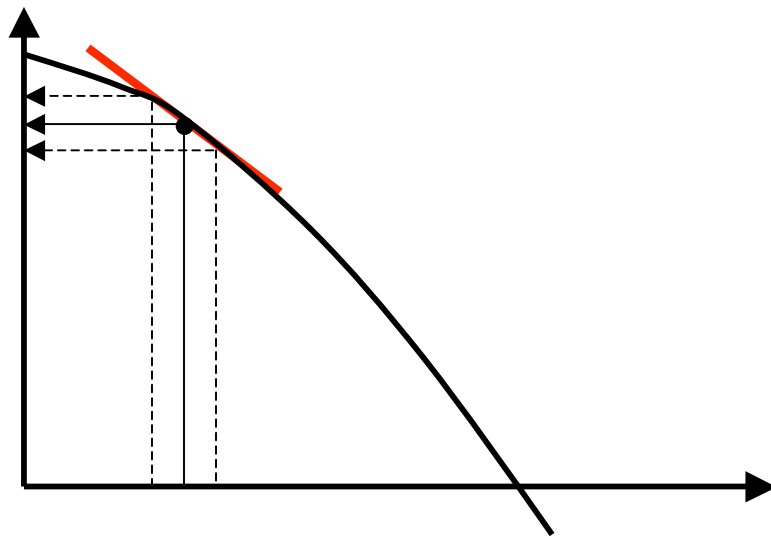
Propagazione, una variabile: esempio

Funzione di una variabile

$$q = q(x) \quad x = x_m \pm \delta x$$

$$q_m = q(x_m)$$

$$\delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right|_{x=x_m} \delta x$$



Un esempio

$$\theta = (20 \pm 3)^\circ \Rightarrow \cos \theta = ?$$

$$\theta_m = 20^\circ = 0.35 \text{ rad} \quad \delta \theta = 3^\circ = 0.05 \text{ rad}$$

$$\cos(\theta_m) = 0.94$$

$$\begin{aligned} \delta(\cos \theta) &= \left| \frac{d \cos \theta}{d \theta} \right|_{\theta=0.35} \delta \theta = \\ &= |\sin(0.35)| \delta \theta = \\ &= 0.34 \times 0.05 = 0.02 \end{aligned}$$

$$\cos \theta = 0.94 \pm 0.02$$

Propagazione: caso generale

Funzione arbitraria di piu' variabili (riassume tutti i casi precedenti)

$$q = q(u, v, \dots) \Rightarrow q_m = q(u_m, v_m, \dots)$$

$$\delta q \leq \left| \frac{\partial q}{\partial u} \right| \delta u + \left| \frac{\partial q}{\partial v} \right| \delta v + \dots \quad \text{con derivate parziali valutate in:} \\ (u_m, v_m)$$

In molti casi questa e' una sovrastima dell'errore:

se le incertezze in u, v, \dots sono **indipendenti e accidentali**,
l'incertezza viene stimata con la "somma in quadratura"

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial u} \delta u \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v} \delta v \right)^2 + \dots}$$

Ritorniamo su questo punto discutendo le misure indirette **ripetute**



Propagazione, caso generale: giustificazione

Funzione arbitraria di piu' variabili:

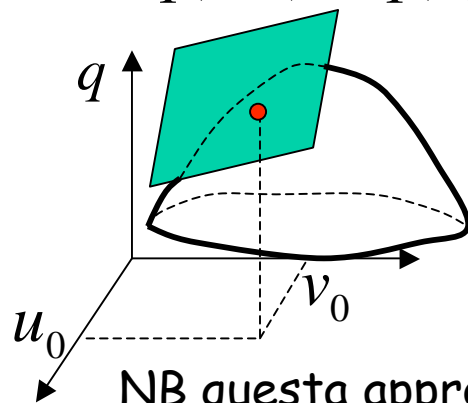
generalizzazione del differenziale (= approssimante lineare!) a piu' variabili
per semplicita` : caso di due variabili (risultato generalizzabile a piu' variabili)

$$u = u_0 + du, \quad v = v_0 + dv$$

$$\Delta q = q(u,v) - q(u_0,v_0) \approx dq$$

$$q(u,v) \approx q(u_0,v_0) + dq = q(u_0,v_0) + \left(\frac{\partial q}{\partial u} \right)_{(u,v)=(u_0,v_0)} du + \left(\frac{\partial q}{\partial v} \right)_{(u,v)=(u_0,v_0)} dv$$

Derivate parziali
valutate in (u_0,v_0)



Interpretazione geometrica: piano tangente al
grafico della funzione in $P=(u_0,v_0,q(u_0,v_0))$

NB questa approssimazione equivale a valutare la variazione della funzione sul piano tangente (grafico dell'approssimante lineare) piuttosto che sulla superficie che rappresenta il grafico della funzione di due variabili



Propagazione, caso generale: giustificazione

Valori estremi per le grandezze u , v :

$$u = u_m \pm \delta u, \quad v = v_m \pm \delta v$$

⇒ valori estremi per $q(u, v)$:

$$q = q(u_m, v_m) \pm \left(\left| \frac{\partial q}{\partial u} \right| \delta u + \left| \frac{\partial q}{\partial v} \right| \delta v \right), \text{ derivate valutate in } (u_m, v_m)$$

⇒ incertezza massima per $q(u, v)$:

$$\delta q = \left| \frac{\partial q}{\partial u} \right| \delta u + \left| \frac{\partial q}{\partial v} \right| \delta v, \text{ derivate valutate in: } (u_m, v_m)$$

⇒ NB si possono riottenere da questa equazione tutti i casi particolari (somme, sottrazioni, prodotti, etc.: provare, per esercizio)



Propagazione, caso generale: esempio

Determiniamo l'errore massimo sulla quantità q

$$q(x, y) = x^2 y - xy^2$$

Con stime per i migliori valori e le incertezze di x , y :

$$x = 3.0 \pm 0.1 \quad y = 2.0 \pm 0.1$$

$$q_m = x_m^2 y_m - x_m y_m^2 = 6.0$$

$$\text{(contributo all'errore da } \delta x) = \delta q_x = \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \delta x = |2xy - y^2| \delta x = |12 - 4| \times 0.1 = 0.8$$

$$\text{(contributo all'errore da } \delta y) = \delta q_y = \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \delta y = |x^2 - 2xy| \delta y = |9 - 12| \times 0.1 = 0.3$$

Risultato finale:

Errore assoluto

massimo: $\delta q = \delta q_x + \delta q_y = 0.8 + 0.3 = 1.1$

$$q = 6.0 \pm 1.1$$

Errore assoluto

in quadratura: $\delta q = \sqrt{(\delta q_x)^2 + (\delta q_y)^2} = \sqrt{(0.8)^2 + (0.3)^2} = 0.9$

$$q = 6.0 \pm 0.9$$



Alcuni casi particolari: somme, differenze

- **Somma o differenza**

- L'errore massimo **assoluto** è (in entrambi i casi) la **somma** degli errori massimi **assoluti** degli operandi

$$q = x + y \quad x = x_m \pm \delta x, \quad y = y_m \pm \delta y$$

$$q_m = x_m + y_m \quad \delta q = \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \delta y = 1 \times \delta x + 1 \times \delta y = \delta x + \delta y$$

$$q = x - y \quad x = x_m \pm \delta x, \quad y = y_m \pm \delta y$$

$$q_m = x_m - y_m \quad \delta q = \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \delta y = 1 \times \delta x + |-1| \times \delta y = \delta x + \delta y$$



Alcuni casi particolari: quozienti, prodotti, potenze

• Quoziente o prodotto

- L'errore massimo relativo è la somma degli errori massimi relativi

$$q = xy \quad x = x_m \pm \delta x, \quad y = y_m \pm \delta y$$

$$q_m = x_m y_m \quad \frac{\delta q}{|q|} = \frac{1}{|q|} \left(\left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \delta y \right) = \frac{|y|}{|xy|} \delta x + \frac{|x|}{|xy|} \delta y = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|}$$

$$q = \frac{x}{y} \quad x = x_m \pm \delta x, \quad y = y_m \pm \delta y$$

$$q_m = \frac{x_m}{y_m} \quad \frac{\delta q}{|q|} = \frac{1}{|q|} \left(\left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \delta y \right) = \frac{|y|}{|x|} \left(\frac{1}{|y|} \delta x + \frac{|x|}{|y^2|} \delta y \right) = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|}$$

• Potenze

- Immediata generalizzazione dal prodotto:

$$q = x^n \quad \frac{\delta q}{|q|} = |n| \frac{\delta x}{|x|}$$



Propagazione: "forma monomia"

Esercizio: verificare che nel caso di una "forma monomia":

$$q(x, y, \dots, u, v, \dots) = \frac{x^a y^b \dots}{u^c v^d \dots}$$

Il calcolo dell'errore relativo con la regola generale riproduce i risultati particolari visti in precedenza:

$$\begin{aligned} \frac{\delta q}{|q|} &= \frac{1}{|q|} \left(\left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \delta y + \dots + \left| \frac{\partial q}{\partial u} \right| \delta u + \left| \frac{\partial q}{\partial v} \right| \delta v + \dots \right) = \dots \\ &= \dots = |a| \frac{\delta x}{|x|} + |b| \frac{\delta y}{|y|} + \dots + |c| \frac{\delta u}{|u|} + |d| \frac{\delta v}{|v|} + \dots \end{aligned}$$

Cioè: gli errori massimi relativi si sommano, pesati con il valore assoluto degli esponenti! (una regola simile vale per le somme quadratiche)



Conclusioni

Abbiamo discusso:

- Stima delle incertezze in misure **non ripetute dirette**
- "propagazione" degli errori in misure **non ripetute indirette**

Prossima lezione: misure **ripetute dirette** ...

- L'analisi statistica ci aiuta a minimizzare le incertezze "accidentali"
- ... **e alle misure ripetute indirette**
- "propagazione" degli errori, riveduta e corretta

