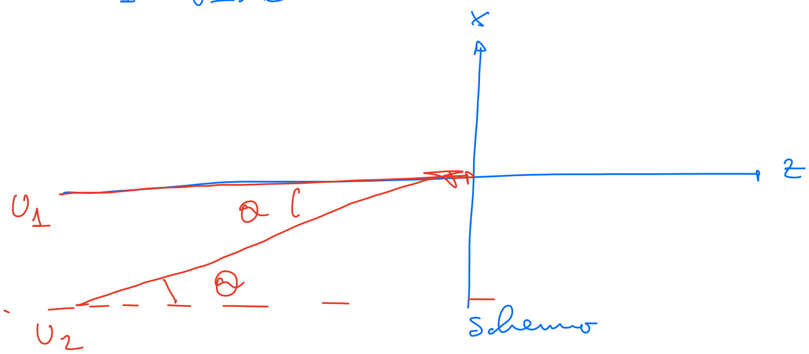
INTERFERENZA DI ONDE PIANE CHE FORMANO UN ANGOLO

Prendiamo due onde piane di uguale intensità I_0

$$U_1 = \sqrt{I_0}\, e^{-ikz} \qquad U_2 = \sqrt{I_0}\, e^{-i(k\cos\theta\, z + k\sin\theta\, x)}$$



I vettori propagazione formano tra loro un angolo θ

Nel piano $z=0$, dove i fasci interferiscono, ovvero

$$U_{z=0} = U_1(z=0) + U_2(z=0) = \sqrt{I_0} + \sqrt{I_0}\, e^{-ikx\sin\theta}$$

diff. di fase $\varphi = kx\sin\theta$

$$= \sqrt{I_0}\left(1 + e^{-ikx\sin\theta}\right)$$

Di conseguenza l'intensità totale è data da

$$I = |U|^2 = I_0\left(1 + e^{-ikx\sin\theta}\right)\left(1 + e^{+ikx\sin\theta}\right) =$$

$$= I_0\left(1 + e^{ikx\sin\theta} + e^{-ikx\sin\theta} + 1\right) = 2I_0\left[1 + \cos(kx\sin\theta)\right]$$

L'intensità I forma sullo schermo una figura di interferenza che varia sinusoidalmente con x e ha periodo spaziale $\dfrac{2\pi}{k\sin\theta} = \dfrac{\lambda}{\sin\theta}$

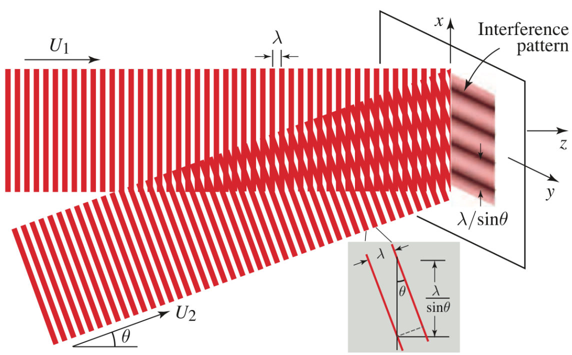


Figure 2.5-4 The interference of two plane waves traveling at an angle θ with respect to each other results in a sinusoidal intensity pattern in the x direction with period $\lambda/\sin\theta$.

Da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023

Esempi di applicazioni

– stampa di una figura a righe spaziate di $\frac{\lambda}{\sin\theta}$ per creare un reticolo di diffrazione.

– misurare l'angolo θ tra un'onda ed un'altra di "riferimento" $\Rightarrow$ olografia.

INTERFERENZA DI DUE SORGENTI PUNTIFORMI

Da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023

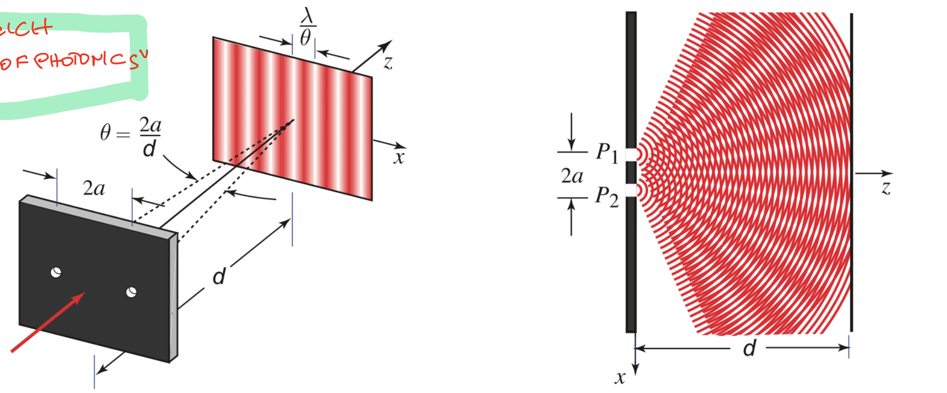
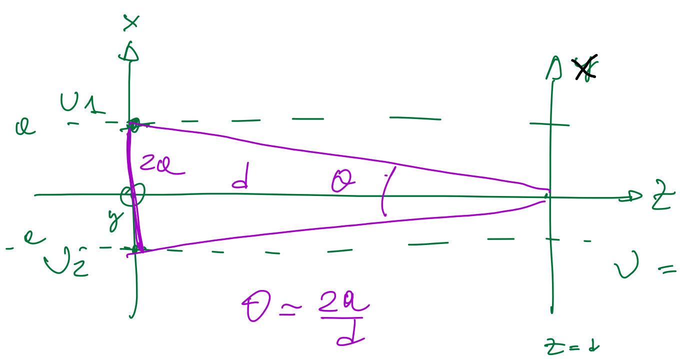


Figure 2.5-6 Interference of two spherical waves of equal intensities originating at the points P_1 and P_2. The two waves can be obtained by permitting a plane wave to impinge on two pinholes in a screen. The light intensity at an observation plane a large distance d from the pinholes takes the form of a sinusoidal interference pattern, with period $\approx \lambda/\theta$, along the direction of the line connecting the pinholes.

Ricordo l'espressione dell'onda parabolica

$$U(\vec{r}) = \frac{A}{z} e^{-ikz} e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2z}}$$

Scrivo allora



$$U_1 = \frac{A}{z} e^{-ikz} e^{-ik\frac{(x-a)^2+y^2}{2z}}$$

$$U_2 = \frac{A}{z} e^{-ikz} e^{-ik\frac{(x+a)^2+y^2}{2z}}$$

$$U = U_1 + U_2 = \frac{A}{z} e^{-ikz} \left(e^{-ik\frac{(x-a)^2+y^2}{2z}} + e^{-ik\frac{(x+a)^2+y^2}{2z}} \right)$$

Nel piano $z = d$

$$U(x,y,d) = \frac{Ae^{ikd}}{d}\left(e^{-ik\frac{(x-a)^2+y^2}{2d}} + e^{-ik\frac{(x+a)^2+y^2}{2d}}\right) =$$

$$\frac{Ae^{ikd}}{d}\left(e^{-ik\frac{x^2+y^2-2ax+a^2}{2d}} + e^{-ik\frac{x^2+y^2+a^2+2ax}{2d}}\right) =$$

$$\frac{Ae^{ikd}}{d}\left(= e^{-ik\frac{x^2+y^2+a^2}{2d}} e^{ik\frac{ax}{d}} + e^{-ik\frac{x^2+y^2+a^2}{2d}} e^{-ik\frac{ax}{d}}\right) =$$

$$= e^{-ik\frac{x^2+y^2+a^2}{2d}}\left(2\cos k\frac{ax}{d}\right)\frac{Ae^{ikd}}{d}$$

$$I(x,y,d) = |U|^2 = \frac{A^2}{d^2}4\cos^2 k\frac{ax}{d} = \frac{2A^2}{d^2}\left(1+\cos\frac{2kax}{d}\right) =$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + \sin^2\alpha\\ &\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha\\ &\cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = \cos 2\alpha\\ &\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{aligned}}$$

$$= 2I_0(1+\cos K\Theta x) = 2I_0\left(1+\cos\frac{2\pi\Theta x}{\lambda}\right)$$

$\Rightarrow$ La distribuzione dell'intensità nel piano (x,y) è periodica lungo x e ha un periodo h dato da

$$K\Theta(x+h) = K\Theta x + 2\pi \Rightarrow h = \frac{2\pi}{K\Theta} = \frac{\lambda}{\Theta}$$

INTERFERENZA DI PIÙ ONDE

- Supponiamo di avere M onde monocromatiche aventi la stessa frequenza. La loro sovrapposizione $U = U_1 + U_2 + \dots U_M$ genera un'onda la cui frequenza non cambia e la cui intensità $I = |U|^2$ è determinata anche dalle fasi relative delle U_i.
- Il ruolo delle fasi è molto importante in questo tipo di interferenza

i) M onde di uguale ampiezza ed uguali differenze di fase

$$U_m = \sqrt{I_0}\, e^{j(m-1)\varphi} \qquad m = 1, 2, \ldots M$$

φ è la differenza di fase tra onde successive

Riscriviamo $U_m = \sqrt{I_0}\, h^{m-1}$ dove $h = e^{i\varphi}$

Abbiamo quindi

$$U = \sum_{m=1}^{M} \sqrt{I_0}\, h^{m-1} = \sqrt{I_0} \sum_{j=0}^{M-1} h^{j} = \sqrt{I_0}\,(1 + h + h^2 + \dots + h^{M-1})$$

$$= \sqrt{I_0}\, \frac{1 - h^M}{1 - h} \; (*) = \sqrt{I_0}\, \frac{1 - e^{i\varphi M}}{1 - e^{i\varphi}}\,.$$

Posso poi scrivere

$$\frac{1 - e^{i\varphi M}}{1 - e^{i\varphi}} = \frac{e^{i\frac{\varphi M}{2}} e^{-i\frac{\varphi M}{2}}}{e^{i\varphi/2}\, e^{-i\varphi/2}} \, \frac{1 - e^{i\varphi M}}{1 - e^{i\varphi}} = \frac{e^{i\frac{\varphi M}{2}}}{e^{i\varphi/2}} \, \frac{e^{-i\frac{\varphi M}{2}} - e^{i\varphi M/2}}{e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2}}$$

$$= e^{i\frac{\varphi}{2}(M-1)} \, \frac{\sin \frac{\varphi M}{2}}{\sin \varphi/2}$$

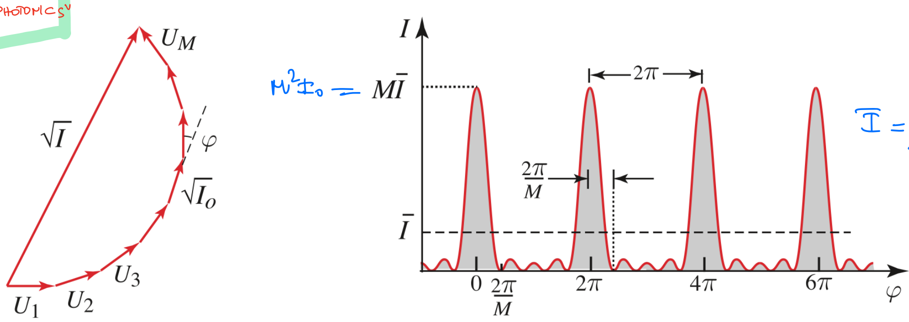
(*) Ricordiamo che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

Segue allora

$$I = |U|^2 = I_0 \, \frac{\sin^2 \frac{\varphi M}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

INTERFERENZA DI M ONDE DI UGUALE AMPIEZZA E DIFF. DI FASE COSTANTE

Da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023



$M^2 I_0 = M\bar{I}$

$$\bar{I} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I\, d\varphi = M I_0$$

Figure 2.5-7 (*a*) The sum of M phasors of equal magnitudes and equal phase differences. (*b*) The intensity I as a function of φ. The peak intensity occurs when all the phasors are aligned; it is then M times greater than the mean intensity $\bar{I} = MI_0$. In this example $M = 5$.

ESEMPIO – Riflessione di Bragg e angolo di Bragg –

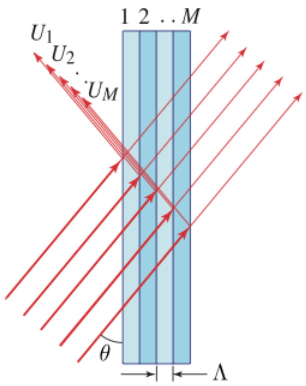
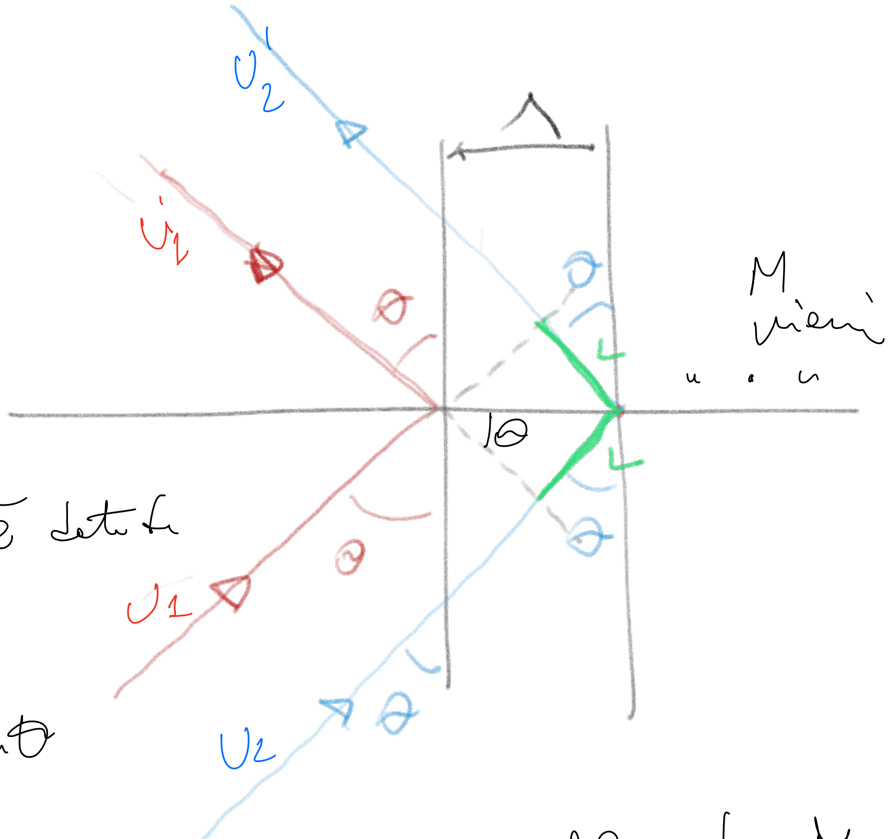


Figure 2.5-8 Reflection of a plane wave from M parallel planes separated from each other by a distance Λ. The reflected waves interfere constructively and yield maximum intensity when the angle θ is the Bragg angle θ_B. Note that θ is defined with respect to the parallel planes.

Da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023



$$\Delta L = 2L = 2\Lambda \sin\theta$$

Segue che lo sfasamento è dato da

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} 2\Lambda \sin\theta$$

L'interferenza delle onde riflesse da M piani ha un massimo quando

$$\Delta\phi = 2\pi \Rightarrow 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} 2\Lambda \sin\theta_B$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\theta_B = \frac{\lambda}{2\Lambda}} \quad \text{ANGOLO DI BRAGG}$$

INTERFERENZA DI ∞ ONDE CON DIFF. DI FASE COSTANTE E AMPIEZZA DECRESCENTE

Prendiamo un numero ∞ di onde con diff. di fase costante $= \varphi$ e ampiezza che decresce in maniera geometrica

$$U_1 = \sqrt{I_0} \qquad U_2 = \tilde{h} U_1 = \tilde{h}\sqrt{I_0}\,, \quad \dots \quad U_m = \tilde{h}\, U_{m-1} = \tilde{h}^{m-1} U_1 = \tilde{h}^{m-1}\sqrt{I_0}$$

dove $\tilde{h} = h e^{i\varphi}$, $|h| < 1$

Da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023

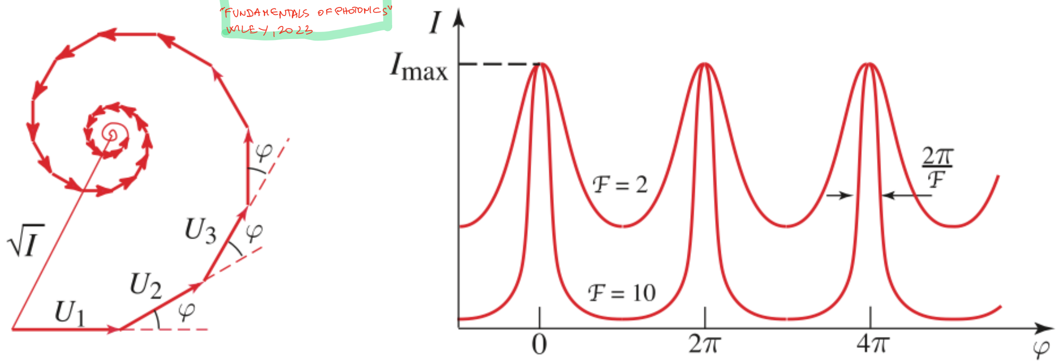


Figure 2.5-10 (a) The sum of an infinite number of phasors whose magnitudes are successively reduced at a geometric rate and whose phase differences φ are equal. (b) Dependence of the intensity I on the phase difference φ for two values of $\mathcal{F}$. Peak values occur at $\varphi = 2\pi q$. The full width at half maximum of each peak is approximately $2\pi/\mathcal{F}$ when $\mathcal{F} \gg 1$. The sharpness of the peaks increases with increasing $\mathcal{F}$.

Segue allora per l'ampiezza complessa totale

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} U_m = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{h}^{m-1}\sqrt{I_0} = \sqrt{I_0}\left(1 + \tilde{h} + \tilde{h}^2 + \dots\right) = \frac{\sqrt{I_0}}{1-\tilde{h}}$$

$$= \frac{\sqrt{I_0}}{1 - h e^{i\varphi}}$$

Nota: la serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} a r^k$ converge a $\frac{a}{1-r}$ se $|r| < 1$

L'intensità si trova da

$$I = |U|^2 = \frac{I_0}{|1 - h e^{i\varphi}|^2} = \frac{I_0}{|1 - h\cos\varphi + i h \sin\varphi|^2} = \frac{I_0}{(1-h\cos\varphi)^2 + h^2\sin^2\varphi} = \frac{I_0}{(1-h)^2 + 4h\sin^2\varphi/2} \qquad (*)$$

(*)

$$(1-h\cos\varphi)^2+h^2\sin^2\varphi = 1-2h\cos\varphi+h^2\cos^2\varphi+h^2\sin^2\varphi =$$

$$= 1-2h\cos\varphi+h^2 = 1-2h\left(\cos^2\varphi/2-\sin^2\varphi/2\right)+h^2 =$$

$$= 1-2h\cos^2\varphi/2+2h\sin^2\varphi/2+h^2 =$$

$$= 1-2h\left(1-\sin^2\varphi/2\right)+2h\sin^2\varphi/2+h^2 =$$

$$= 1-2h+h^2+4h\sin^2\varphi/2 = (1-h)^2+4h\sin^2\varphi/2$$

L'intensità I si riscrive di solito nella forma

$$I = \frac{I_{max}}{1+\left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2\sin^2\varphi/2} \qquad \text{con} \qquad I_{max} = \frac{I_0}{(1-h)^2}$$

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{h}}{1-h} \qquad \text{FINESSE}}$$

Se $h \simeq 1$ allora $\mathcal{F}$ è grande e i picchi della I diventano molto stretti.

Prendiamo $|\varphi| \ll 1$ (vicino al picco) $\Rightarrow$ $\sin\varphi/2 \simeq \varphi/2$ e

$$\boxed{I \simeq \frac{I_{max}}{1+\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2\varphi^2}}$$

$$I \to I/2 \qquad \frac{I_{max}}{1+\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2\varphi^2} = \frac{I_{max}}{2}$$

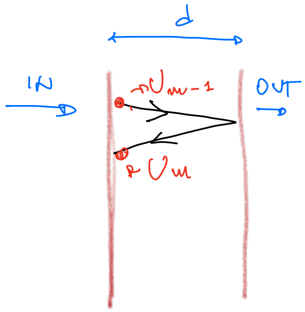
$$2 = 1+\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2\varphi^2 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{\mathcal{F}}$$

$\Rightarrow$ la F.W.H.M. (Full Width Half Maximum) è $\boxed{\Delta\varphi \simeq \frac{2\pi}{\mathcal{F}}}$

la finesse è pari al rapporto

$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}$ cioè $\dfrac{\text{periodo}}{\text{larghezza del picco a mezza altezza}}$, quindi misura quanto sono stretti i picchi e quindi quanto è sensibile l'intensità I alle deviazioni di φ dai valori multipli di 2π ($2\pi q$ con $q \in \mathbb{N}$) che corrispondono ai massimi –

Il principale dispositivo che sfrutta l'interferenza multipla di ∞ fasci è l'interferometro di Fabry-Perot



$$U_m = \tilde{h}\, U_{m-1} = r\, e^{ik2d}$$

$$h = r$$

$$\varphi = 2kd = \frac{2\pi}{\lambda}2d = \frac{4\pi\nu d}{c} = \frac{2\pi\nu}{\left(\frac{c}{2d}\right)}$$

specchi del F.P. ciascuno di riflettività $r<1$

L'intensità trasmessa è data come sopra da

$$I = \frac{I_{max}}{1+\left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2 \varphi/2}$$

e ha dei massimi quando $\frac{\varphi}{2} = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

cioè $\frac{1}{2}\frac{2\pi\nu}{\left(\frac{c}{2d}\right)} = n\pi \Rightarrow \nu = n\left(\frac{c}{2d}\right)$

L'intensità trasmessa in funzione della frequenza ottica ν presenta dei picchi a frequenze separate di $\frac{c}{2d}$, che si dice Free Spectral Range. La larghezza in frequenza dei picchi è $\Delta\nu = \frac{FSR}{\mathcal{F}} = \frac{c/2d}{\mathcal{F}}$.

Ricapitolando, per un FP con specchi uguali abbiamo

FINESSE $= \mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}$ $\qquad$ FSR $= \frac{c}{2d}$ $\qquad$ $\Delta\nu = \frac{FSR}{\mathcal{F}}$

Esempio: FP di KWISP, specchi con $r = 0{,}99995$ separati di $d = 0.1$ m.

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{0.99995}}{1-0.99995} = 62798 \qquad FSR = 1.5\ \text{GHz} \qquad \Delta\nu = 23.89\ \text{KHz}$$

ESEMPIO — INTERFEROMETRO LIGO-VIRGO

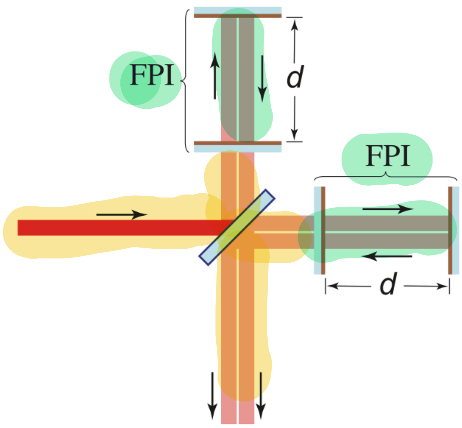


Figure 2.5-11 The LIGO interferometer is a Michelson interferometer (MI) with Fabry–Perot interferometers (FPIs) nested in each of its arms. Each FPI in the advanced-LIGO instrument has a length $d \approx 4$ km and a finesse $\mathcal{F} \approx 450$, so that the enhancement in sensitivity with respect to an ordinary MI is $2\mathcal{F}/\pi \approx 286$. The gravitational wave observed in 2015 imparted to the LIGO interferometer a differential spatial strain $(\Delta d_2 - \Delta d_1)/d \equiv \Delta d/d$ with a magnitude of roughly 5×10^{-22}, which corresponds to a differential length deviation Δd of about 2 am (some 400 times smaller than the radius of a proton). The light source was a 20-W Nd:YAG laser operated at $\lambda_o = c_o/\nu = 1.064$ μm. The corresponding phase difference $\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1$ thus had a magnitude of $2\pi\nu\Delta d/c_o \approx 1.8 \times 10^{-11}$ rad; its oscillations were in the audio-frequency range.

$\simeq 2 \times 10^{-18}$ "

- Interferometro di Michelson con interferometri di FP inseriti nei bracci del Mich.
- Il Mich rivela le differenze di fase tra i fasci che si propagano lungo i suoi bracci.
- I FP amplificano le fasi in ciascun braccio, aumentando la sensibilità dello strumento.

Poniamo:

- φ = diff. di fase dovuta ad una andata-ritorno nel FP.
- L'ampiezza complessa U dell'onda riflessa dal FP è data da $U = \dfrac{\sqrt{I_0}}{1 - re^{i\varphi}}$ (r è la riflettività degli specchi)

quindi la differenza di fase totale introdotta dal FP è

$$\arg\{U\} = \arctan\frac{\mathrm{Im}\{U\}}{\mathrm{Re}\{U\}} = \arctan\left(\frac{r\sin\varphi}{1 - r\cos\varphi}\right)$$

- Supponiamo di aver "accordato" il FP in modo che $\varphi = 2n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$, cioè su un massimo di trasmissione e di introdurre una piccola perturbazione andata-ritorno $2\Delta\varphi \ll \pi$. Si può allora espandere $\arg\{U\}$ in serie di Taylor intorno a φ e trovare

$$\boxed{\arg\{U\} = \frac{2\Delta\varphi r}{1 - r}}$$

v. sotto ↓

$$\sin\varphi \Rightarrow \sin(2\pi n + 2\Delta\varphi) = \sin(2\pi)\cos(2\Delta\varphi) + \cos(2\pi)\sin(2\Delta\varphi)$$
$$= \sin(2\Delta\varphi)$$

$$\cos\varphi \Rightarrow \cos(2\pi n + 2\Delta\varphi) = \cos(2\pi)\cos(\Delta\varphi) - \sin(2\pi)\sin(2\Delta\varphi) = 1$$

quindi $\dfrac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi} \to \dfrac{2\Delta\varphi r}{1-r}$ e ricordando

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5) \Rightarrow \arg\{U\} = \frac{2\Delta\varphi r}{1-r}$$

Se gli specchi hanno $r \approx 1$ (alta finezza) avremo

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{r}}{1-r} \approx \frac{\pi}{1-r} \qquad e \qquad \arg\{U\} = \frac{2\Delta\varphi}{1-r}$$

cioè $\arg\{U\} = \left(\dfrac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)\Delta\varphi$ → il FP amplifica lo sfasamento $\Delta\varphi$ di un fattore $\left(\dfrac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)$ che può essere molto grande

Secondo quanto visto prima, l'intensità all'uscita del Michelson è $I = I_0[1+\cos(\varphi_2-\varphi_1)]$

fasi acquisite nei due bracci

Regoliamo il Mich. sulla "frangia" scura, cioè in modo che $\varphi_2-\varphi_1 = \pi$ in assenza di perturbazioni. Introduciamo poi le perturbazioni ponendo $\varphi_2 = \pi + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)\Delta\varphi_1$ e $\varphi_1 = \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)\Delta\varphi_2$.

Segue quindi che $I = I_0\left\{1 - \cos\left[\dfrac{2\mathcal{F}}{\pi}(\Delta\varphi_2-\Delta\varphi_1)\right]\right\}$ (*)

Fattore di amplificazione

(*) $\varphi_2 = \pi + \delta_2$, $\varphi_1 = \delta_1$ ⇒ $\varphi_2-\varphi_1 = \pi + (\delta_1-\delta_2) = \alpha+\beta$

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1) = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos\pi\cos(\delta_1-\delta_2) - \sin(\pi)\sin(\delta_1-\delta_2)$$
$$= -\cos(\delta_1-\delta_2)$$

ONDE POLICROMATICHE E IMPULSATE

• Un'onda policromatica è sempre descritta da una funzione d'onda $u(\vec{r},t)$, che però non è armonica.

• Si può tuttavia espandere $u(\vec{r},t)$ in serie di Fourier e utilizzare quanto già visto nella propagazione di onde armoniche monocromatiche.

$$\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\nu)\, e^{i(2\pi\nu)t}\, d\nu} \qquad \text{(in una posizione } \vec{r} \text{ finita)}$$

i "coefficienti di Fourier" sono in generale $\in \mathbb{C}$ e dati da

$$\boxed{V(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt} \qquad \text{TRASFORMATA DI FOURIER}$$

Notiamo che dato che $u(t) \in \mathbb{R}$ $\quad V(-\nu) = V^*(\nu)$
(è una proprietà delle trasformate di Fourier)

• Si può rappresentare la funzione $u(t) \in \mathbb{R}$ con una funzione $\in \mathbb{C}$ $\quad U(t) = 2\int_0^{\infty} V(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu$ ⊙

che include solo le frequenze positive.

Segue che la T.F. di $U(t)$ è $V(\nu) = \begin{cases} 2V(\nu) & \nu \geq 0 \\ 0 & \nu < 0 \end{cases}$

Naturalmente $\quad u(t) = \mathrm{Re}\{U(t)\} = \frac{1}{2}\left[U(t) + U^*(t)\right]$ ⊙

La funzione $U(t)$ è detta segnale analitico complesso.

⊙ Dimostrazione

$$u(t) = \int_0^{\infty} V(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu + \int_{-\infty}^{0} V(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu \overset{\text{(v. sopra)}}{=} \frac{1}{2}U(t) + \underbrace{\int_0^{\infty} V(-\nu)\, e^{-i2\pi\nu t}\, d\nu}_{\text{cambio di variabile } \nu \to -\nu} =$$

$$= \frac{1}{2} U(t) + \frac{1}{2} U^*(t) \qquad \text{c.v.d.}$$

Esempio $\quad u(t) = \cos(\omega t) \quad$ dove $\quad U(t) = e^{i\omega t}$

$\Rightarrow$ corrisponde alla rappresentazione complessa.

In questo caso $V(\nu) = \delta(\nu' - \nu)$ e

$$U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu' - \nu)\, e^{i 2\pi \nu t}\, d\nu = e^{i 2\pi \nu' t} = e^{i\omega t}$$

Infatti

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(U^* + U\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right) = \cos \omega t$$

Se introduco anche la dipendenza spaziale avrò

$u(\vec{r}, t) \longrightarrow U(\vec{r}, t)$ funzione d'onda complessa.

~~$\in \mathbb{R}$~~ $\qquad \in \mathbb{C}$

$\rightarrow$ Siccome ogni componente di Fourier della $U(\vec{r}, t)$ soddisfa l'equazione d'onda, anche $U(\vec{r}, t)$ la soddisfa

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

$\rightarrow$ Esempi grafici per un'onda quasi-monocromatica con componenti di Fourier confinate in una banda ristretta $\Delta\nu$

$V(\vec{r}, \nu) = FT\{u(\vec{r}, t)\}$

$V(\vec{r}, \nu) = 2V(\vec{r}, \nu) = FT\{U\}$

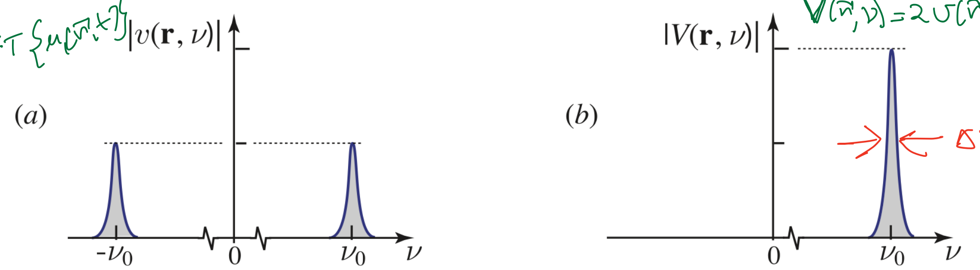


Figure 2.6-1 (a) The magnitude $|v(\mathbf{r}, \nu)|$ of the Fourier transform of the wavefunction $u(\mathbf{r}, t)$. (b) The magnitude $|V(\mathbf{r}, \nu)|$ of the Fourier transform of the corresponding complex wavefunction $U(\mathbf{r}, t)$.

Intensità di un'onda policromatica

$$I(\vec{r}, t) = 2 \underbrace{\langle u^2(r, t) \rangle}_{\text{media temporale}} =$$

$$= 2\left\langle \left[\frac{1}{2}\left(U^* + U\right)\right]^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\langle U^2 \rangle + \frac{1}{2}\langle U^{*2} \rangle + \langle U \cdot U^* \rangle$$

Se la media temporale è fatta su periodi T tali che $\frac{1}{\nu_0} \ll T \ll \frac{1}{\Delta\nu}$

$\nu_0 \to$ freq. centrale

$\Delta\nu \to$ banda di frequenze

allora:

$\langle U^2 \rangle$ oscilla a $2\nu_0$

$\langle U^{*2} \rangle$ oscilla a $-2\nu_0$

$\to$ si mediano entrambi a zero

ma $\langle U \cdot U^* \rangle$ oscilla a $\sim \Delta\nu \ll \nu_0 \Rightarrow$ rimane

Segue allora

$$\boxed{I(\vec{r},t) = \langle U \cdot U^* \rangle = |U(\vec{r},t)|^2}$$

ONDA POLICROMATICA

ONDA PIANA IMPULSATA

$$U(\vec{r},t) = \underbrace{A\left(t - \frac{z}{c}\right)}_{\text{inviluppo complesso}} e^{i 2\pi\nu_0 \left(t - \frac{z}{c}\right)}$$

Si propaga lungo z

$A(t)$ varia nel tempo

ν_0 è la frequenza centrale

(Se $A(t) =$ costante si ha l'onda piana monocromatica)

Visto che $U(\vec{r},t)$ è funzione dell'argomento $(t - \frac{z}{c})$ allora soddisfa $\nabla^2 U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$ indipendentemente dalla forma di A

→ Se A è un impulso di durata τ, ad ogni istante t fissato l'onda è lunga $c\tau$, cioè è un pacchetto d'onda di lunghezza finita che si propaga lungo z

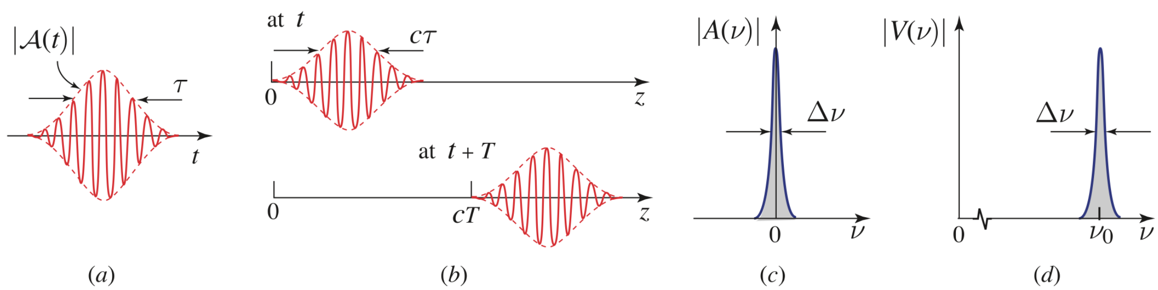


Figure 2.6-2 Temporal, spatial, and spectral characteristics of a pulsed plane wave. (*a*) The wavefunction at a fixed position has duration τ. (*b*) The wavefunction as a function of position at times t and $t+T$. The pulse travels with speed c and occupies a distance $c\tau$. (*c*) The magnitude $|A(\nu)|$ of the Fourier transform of the complex envelope. (*d*) The magnitude $|V(\nu)|$ of the Fourier transform of the complex wavefunction is centered at ν_0.

Si ha che

$$\text{F.T.}\{U\} = V(\vec{r},\nu) = A(\nu-\nu_0)\, e^{-i 2\pi\nu \frac{z}{c}}$$

→ modifica di traslazione delle frequenze della F.T.

dove $\text{F.T.}\{A(t)\} = A(\nu)$ e $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k_0}{c}$

- La funzione $A(t)$ è di solito variabile lentamente rispetto a $\frac{1}{\nu_0}$ ("optical cycle") ⇒ $A(\nu)$ ha $\Delta\nu \ll \nu_0$
- Inoltre se $A(t)$ è gaussiana, lo è anche $A(\nu)$ e si può vedere che $\Delta\nu\Delta t = \frac{1}{4\pi}$

Esempio

$\tau = 1$ ps ⇒ $\Delta\nu = 80$ GHz

se $\nu_0 = 5\times10^{14}$ Hz (luce verde)

⇒ $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 1.6\times10^{-4}$ ⇒ quasi monocromatica