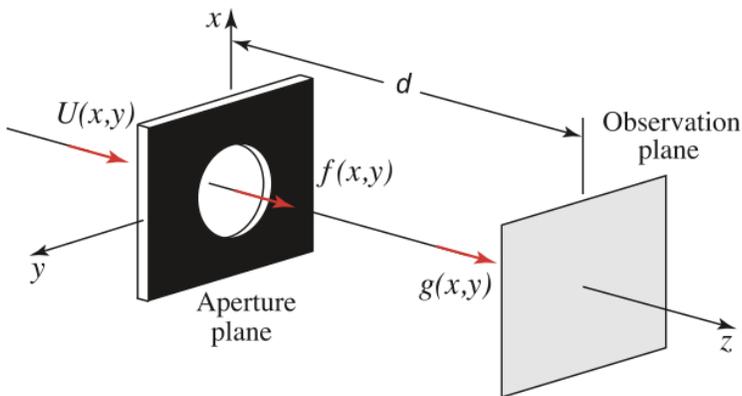


# DIFFRAZIONE

- La distribuzione di intensità di un'onda trasmessa da uno schermo opaco con un'apertura viene detta "figura di diffrazione".
- Nel caso in cui si possa trattare la propagazione con un raso di raggi (tipicamente quando  $d \gg \lambda$ , dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda e  $d$  la dimensione dell'apertura) la figura di diffrazione è semplicemente l'"ombra" dell'apertura.
- Nel caso opposto ( $\lambda \gg d$ ) la determinazione della figura di diffrazione è notevolmente complicata, tuttavia si può ottenere una semplice teoria della diffrazione con le seguenti ipotesi:
  - l'onda incidente è trasversale senza variazioni nei punti appartenenti all'apertura e annullata negli altri punti
  - dopo l'apertura l'onda si propaga nello spazio vuoto fino ad uno schermo, dove si osserverà la figura di diffrazione.



**Figure 4.3-2** A wave  $U(x,y)$  is transmitted through an aperture of amplitude transmittance  $p(x,y)$ , generating a wave of complex amplitude  $f(x,y) = U(x,y)p(x,y)$ . After propagation a distance  $d$  in free space, the complex amplitude is  $g(x,y)$  and the diffraction pattern is the intensity  $I(x,y) = |g(x,y)|^2$ .

Dr. SAHAR MBICH  
FUNDAMENTALS OF PHOTONICS  
MAY 7, 2023

Quindi

$$A(x,y) = U(x,y) p(x,y)$$

e

$$p(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{nell'apertura} \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$$

onda "dopo" lo schermo

onda "prima" dello schermo

una funzione dell'apertura

- la funzione  $g(x,y)$ , sorta alla propagazione di  $f(x,y)$  lungo una distanza  $d$  fino allo schermo, si ottiene con i metodi appena visti.

la figura di diffrazione  $\bar{e}$  data da

$$I(x,y) = |g(x,y)|^2$$

- diffrazione di Fraunhofer  $\propto g$   
 è ottenuta nell' approssimazione di Fraunhofer

- diffrazione di Fresnel  $\propto g^{\bar{e}}$   
 ottenuta nell' approssimazione di Fresnel

## DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER

- L'approssimazione di Fraunhofer determina la propagazione fino allo schermo - vale se  $N_F = \frac{b^2}{\lambda d} \ll 1$  dove

$b$  è la massima distanza radiale nell'apertura

- Se l'onda incidente è piana con intensità  $I_i$ , allora

$$\sqrt{I_i} = U(x,y) \quad \text{e} \quad f(x,y) = \sqrt{I_i} P(x,y)$$

segue allora

$$g(x,y) \approx \sqrt{I_i} h_0 P\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right) \quad \text{dove}$$

$$P(v_x, v_y) = \text{F.T.} \{P(x,y)\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} P(x,y) e^{i2\pi(v_x x + v_y y)} dx dy$$

$$h_0 = \frac{i}{\lambda d} e^{-ikd}$$

quindi

$$I(x,y) = \frac{I_i}{(\lambda d)^2} \left| P\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right) \right|^2$$

DIFFR. DI  
 FRAUNHOFER

Esempio: Apertura circolare - Diffrazione di Fraunhofer

$$P(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2+y^2 \leq D^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{che } \bar{P} \text{ è simmetria circolare,}$$

Da SAUER-BUCH  
FUNDAMENTALS OF OPTICS  
WILEY, 1928

Rischiamo le formule

$$I(x,y) = \frac{I_0}{(\lambda d)^2} \left| P\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right) \right|^2 \quad \text{dove}$$

$$I(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} P(x,y) e^{i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy \quad \text{è la F.T. di } P(x,y)$$

Posso utilizzare  $\otimes$   $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\text{con } F(\nu_x, \nu_y) = \frac{J_1(2\pi\nu_r)}{\nu_r} \quad \text{con } \nu_r = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2},$$

dove  $J_1$  è la funzione di Bessel di ordine 1,

e faccio la convenzione  $X = \frac{2x}{D}$  e  $Y = \frac{2y}{D}$

Segue

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} P(x,y) e^{i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy &= \frac{D^2}{4} \iint_{-\infty}^{+\infty} P\left(\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}\right) e^{i2\pi\left(\frac{\nu_x X}{2} + \frac{\nu_y Y}{2}\right)} dX dY = \\ &= \frac{D^2}{4} \iint_{-\infty}^{+\infty} P(X,Y) e^{i\pi(\nu_x X + \nu_y Y)} dX dY = \\ &= \frac{D^2}{4} \text{F.T.}\{P(X,Y)\} \end{aligned}$$

$\nu_x = \nu_x \frac{D}{2}$   
 $\nu_y = \nu_y \frac{D}{2}$

Se ora identifichiamo  $P(x,y) = f(x,y)$  vedremo che

$$F.T.\{P(x,y)\} = \frac{J_1(2\pi r r)}{r r} \quad \text{dove } r r = \sqrt{x_x^2 + x_y^2} = \frac{D}{2} \sqrt{x_x^2 + x_y^2}$$

quindi

$$P(x_x, x_y) = \frac{D^2}{4} \frac{J_1\left(\frac{2\pi D}{2} \sqrt{x_x^2 + x_y^2}\right)}{\frac{D}{2} \sqrt{x_x^2 + x_y^2}}$$

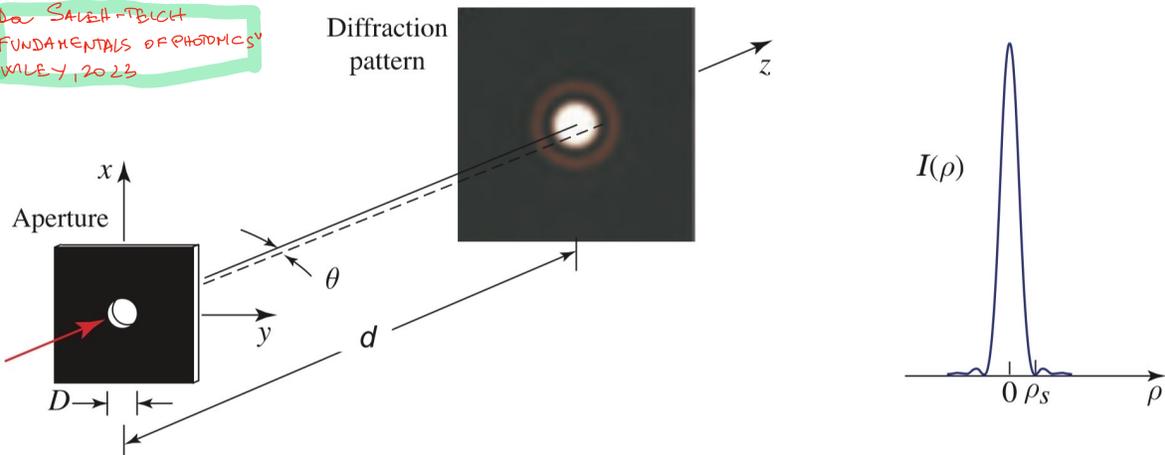
e ora posso ricavare la figura di diffrazione nell'approssimazione di Fraunhofer sostituendo  $x_x \rightarrow \frac{x}{\lambda d}$   $x_y \rightarrow \frac{y}{\lambda d}$

$$I(x,y) = \frac{I_0}{(\lambda d)^2} \left| P\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right) \right|^2 = \left(\frac{D^2}{4\lambda d}\right)^2 \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi D}{\lambda d} \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\frac{D\sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda d}} \right]^2 I_0$$

$$= I_0 \left(\frac{D^2 \pi}{4\lambda d}\right)^2 \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi D \rho}{\lambda d}\right)}{\frac{\pi D \rho}{\lambda d}} \right]^2 = I_0 \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi D \rho}{\lambda d}\right)}{\frac{\pi D \rho}{\lambda d}} \right]^2$$

dove la parte  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $I_0 = I_0 \left(\frac{\pi D^2}{4\lambda d}\right)^2$  è l'intensità massima.

Da SAUREL-TIBICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023



**Figure 4-3-4** The Fraunhofer diffraction pattern from a circular aperture produces the Airy pattern with the radius of the central disk subtending an angle  $\theta = 1.22\lambda/D$ .

Da SAUREL-TIBICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023

Per trovare il raggio  $\rho_s$  del disco centrale, si osserva che il primo zero di  $J_1(x)$  è per  $x = 3.8317$ ,

per cui 
$$\frac{\pi D \rho_s}{\lambda d} = 3.8317 \Rightarrow \rho_s = \frac{3.8317}{\pi} \frac{\lambda d}{D} = 1.22 \frac{\lambda d}{D}$$

e l'angolo sotto il quale  $\theta_s = \frac{\rho_s}{d} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$

- L'approssimazione di Fraunhofer è di solito valida per distanze  $d$  molto grandi, e meno  $d$  non vale ma lente di focale  $f$  per focalizzare le figure di diffrazione.
- In quel caso si usano le formule come sopra, ma con  $\gamma_x = \frac{x}{\lambda f}$  e  $\gamma_y = \frac{y}{\lambda f}$

## DIFFRAZIONE DI FRESNEL

- la teoria della diffrazione di Fresnel è basata sull'ipotesi che l'onda incidente venga moltiplicata per la funzione  $p(x,y)$  che descrive l'apertura e poi si propaghi nello spazio secondo l'approssimazione di Fresnel.
- Prendiamo un'onda piana che si propaga lungo  $z$  con intensità  $I_i$ . Allora:

ampiezza complessa subito dopo l'apertura  $= f(x,y) = \sqrt{I_i} p(x,y)$

- Nell'approssimazione di Fresnel la funzione  $f(x,y)$ , dopo essersi propagata nello spazio vuoto per una distanza  $d$  diventa 
$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x',y') e^{-i\pi \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\lambda d}} dx' dy'$$
 (una convoluzione)  $h_0 = \frac{i}{\lambda d} e^{-ikd}$

- la figura di diffrazione di una apertura  $P(x,y)$  secondo l'approssimazione di Fresnel è quindi data da

$$I(x,y) = |f(x,y)|^2 = \frac{\mp i}{(\lambda d)^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x',y') e^{-i\pi \left[ \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\lambda d} \right]} dx' dy' \right|^2$$

- Riscriviamo l'espressione qui sopra usando  $\sqrt{\lambda d}$  come unità di distanza  $\rightarrow X = \frac{x}{\sqrt{\lambda d}} \quad Y = \frac{y}{\sqrt{\lambda d}}$ ,

segue allora

$$I(X,Y) = \mp i \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(X',Y') e^{-i\pi [(X-X')^2 + (Y-Y')^2]} dx' dy' \right|^2$$

- L'integrale appena scritto è la convoluzione di  $P(X,Y)$  con  $e^{-i\pi(X^2+Y^2)}$

- Sepero  $e^{-i\pi X^2}$  nelle sue parti reale e immaginaria

$$\text{Re} \{ e^{-i\pi X^2} \} = \cos \pi X^2$$

$$\text{Im} \{ e^{-i\pi X^2} \} = \sin \pi X^2$$

(envelopamente per  $X$ ,  
ma forte regione  
in  $X$ )

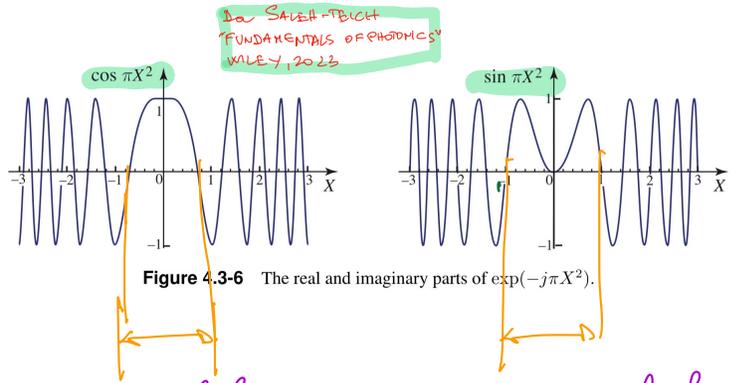


Figure 4.3-6 The real and imaginary parts of  $\exp(-j\pi X^2)$ .

Primo lobo  
 $|X| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Primo lobo  
 $|X| < 1$

Inoltre l'area totale sotto la funzione  $e^{-i\pi X^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\pi X^2} dx = 1$$

e i contributi principali vengono dai primi lobi, mentre i rimanenti si cancellano

• Allora, se  $a$  è il raggio dell'apertura, il raggio della funzione normalizzata è  $\frac{a}{\sqrt{\lambda d}}$  e quindi il risultato della convoluzione dipende da

$$\frac{a^2}{\lambda d} = N_F \quad \text{NUMERO DI FRESNEL}$$

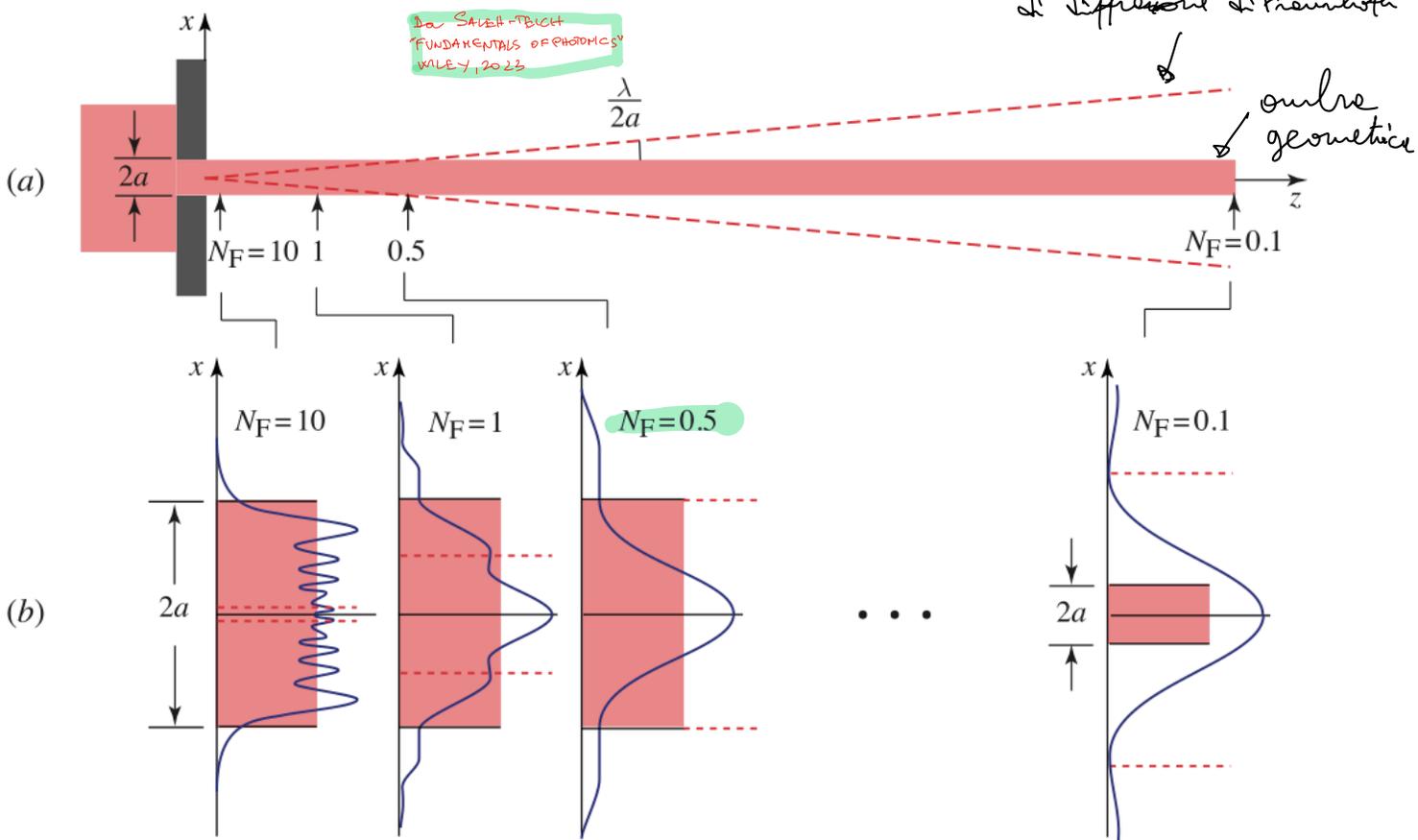
• Se  $N_F \gg 1$ ,  $\frac{a}{\sqrt{\lambda d}}$  è grande rispetto alla lunghezza

dei lobi principali e la convoluzione riproduce  $P(x, y)$ , cioè l'ombra dell'apertura.

Notiamo che l'ottica geometrica si applica nel limite  $\lambda \rightarrow 0$ , che corrisponde a  $N_F \rightarrow \infty$

### ESEMPIO GRAFICO DELLA DIFFRAZIONE DI FRESNEL DA UNA FENDITURA DI LARGHEZZA $D = 2a$

lunghezza delle figure di diffrazione di Fraunhofer



**Figure 4.3-7** Fresnel diffraction from a slit of width  $D = 2a$ . (a) Shaded area is the geometrical shadow of the aperture. The dashed line is the width of the Fraunhofer diffracted beam. (b) Diffraction pattern at four axial positions marked by the arrows in (a) and corresponding to the Fresnel numbers  $N_F = 10, 1, 0.5$ , and  $0.1$ . The shaded area represents the geometrical shadow of the slit. The dashed lines at  $|x| = (\lambda/D)d$  represent the width of the Fraunhofer pattern in the far field. Where the dashed lines coincide with the edges of the geometrical shadow, the Fresnel number  $N_F = a^2/\lambda d = 0.5$ .

# ESEMPIO GRAFICO DELLA DIFFRAZIONE DI FRESNEL DA UNA

## "APERTURA GAUSSIANA"

Aperture "gaussiane"

$$p(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}}$$

corrisponde ad avere in ingresso un fascio gaussiano → luce

Si può calcolare esattamente

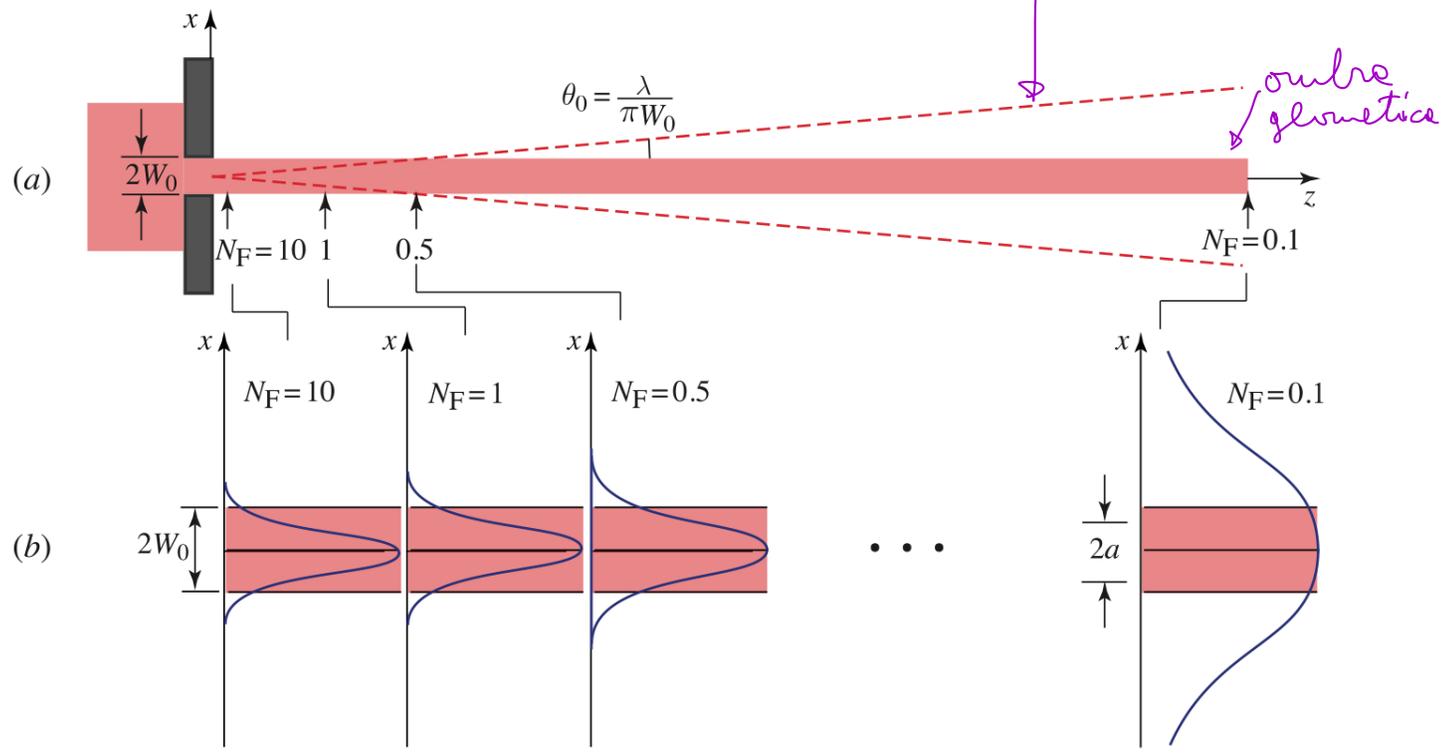
$$I(x,y) = I_0 \left[ \frac{W_0}{W_0^2 + \theta_0^2 d^2} \right] e^{-2 \frac{(x^2+y^2)}{(W_0^2 + \theta_0^2 d^2)}}$$

$d$  → distanza di propagazione  
 $W_0$  → "Waist"  
 $\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi W_0}$

La figura di diffrazione è ancora una gaussiana con larghezza  $\frac{1}{e^2}$  pari a  $W(d) = \sqrt{W_0^2 + \theta_0^2 d^2}$

larghezza della figura di diffrazione di Fresnel

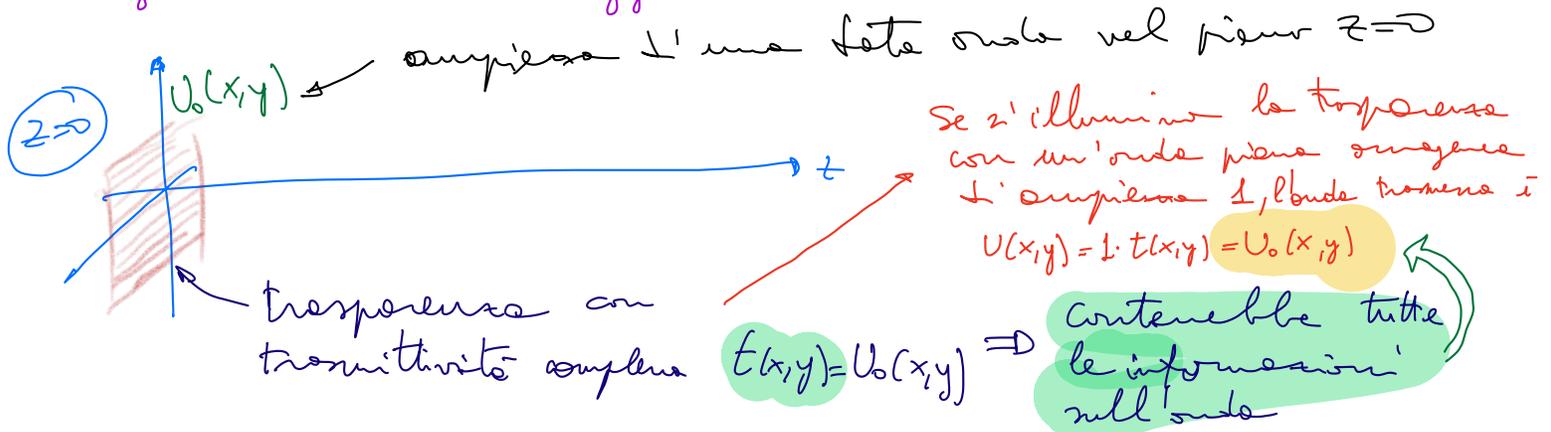
Da SAURENBICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023



**Figure 4.3-8** Fresnel diffraction pattern for a Gaussian aperture of radius  $W_0$  at distances  $d$  such that the parameter  $(\pi/2)W_0^2/\lambda d$ , which is analogous to the Fresnel number  $N_F$  in Fig. 4.3-7, is 10, 1, 0.5, and 0.1. These values correspond to  $W(d)/W_0 = 1.001, 1.118, 1.414,$  and  $5.099$ , respectively. The diffraction pattern is Gaussian at all distances.

# OLOGRAFIA

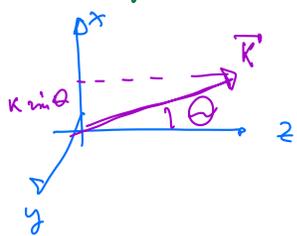
- L'olografia è la registrazione e la ricostruzione di onde luminose
- Un ologramma è una trasparenza 2D che contiene codificate l'ampiezza e la fase di un'onda originata da un oggetto 3D.



$\Rightarrow$  L'onda originale verrebbe ricostruita in tutti i punti del piano  $z=0$  e di conseguenza anche per  $z>0$ .

## Esempio

- Un'onda piana omogenea che si propaga ad un angolo rispetto all'asse  $z$  con  $\vec{k}$  nel piano  $x-z$  ha ampiezza complessa



complessa  $U_0(x,y) = e^{-ikx \sin \theta}$

- la trasparenza corrispondente avrebbe quindi

$$t(x,y) = e^{-ikx \sin \theta}$$

- Abbiamo già visto che una trasparenza con questa trasmissività investita da un'onda piana propagantesi lungo  $z$ , data da  $e^{-ikz}$ , la trasforma in un'onda che si propaga ad un angolo  $\theta$  rispetto a  $z$  nel piano  $x-z$ , cioè riproduce esattamente l'onda originale.

- Il problema è come realizzare la trasparenza  $t(x,y)$  a partire dall'onda originale  $U_0(x,y)$  - ricordiamo che i rivelatori sono in generale sensibili solo all'ampiezza e non alla fase -

# CODIFICA OLOGRAFICA

- la codifica olografica consiste nel mescolare l'onda originale  $U_o$ , detto **fascio oggetto**, con una seconda onda nota  $U_r$ , detto **fascio di riferimento**, e nel registrare la figura di interferenza che producono nel piano  $z=0$
- Se si registra la figura di interferenza su una emulsione fotografica si ottiene una **trasparenza** con trasmissione proporzionale all'intensità della figura:  $\rightarrow$  Ologramma

$$I \propto |U_o + U_r|^2 = |U_r|^2 + |U_o|^2 + U_r^* U_o + U_r U_o^* = I_r + I_o + U_r^* U_o + U_r U_o^* = I_r + I_o + 2\sqrt{I_r I_o} \cos(\varphi_r - \varphi_o)$$

- Per decodificare l'informazione contenuta nell'ologramma si illumina nuovamente l'ologramma con il fascio di riferimento  $U_r$  e si ottiene

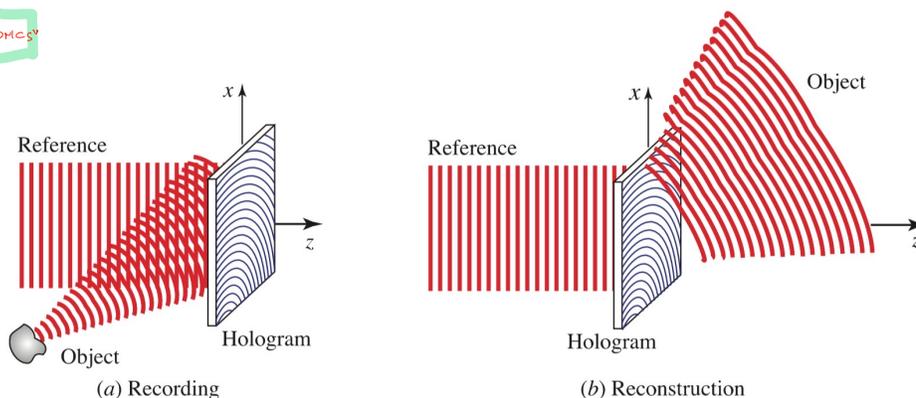
$$U = t U_r \propto \underbrace{U_r I_r + U_r I_o}_{\text{fascio di riferimento modulato da } (I_r + I_o)} + \underbrace{I_r U_o + U_r^2 U_o^*}_{\text{onde originali moltiplicate per l'intensità del fascio di riferimento}}$$

fascio di riferimento modulato da  $(I_r + I_o)$

onde originali moltiplicate per l'intensità del fascio di riferimento

onde originali coniugate modulate da  $U_r^2$

Da SALEH + BUCH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023



**Figure 4.5-1** (a) A hologram is a transparency on which the interference pattern between the original wave (object wave) and a reference wave is recorded. (b) The original wave is reconstructed by illuminating the hologram with the reference wave.

• Il problema si pone ora sulla necessità di separare il termine che contiene l'onda originale

• Se prendiamo  $V_r = \sqrt{I_r} e^{-ikz}$  - onde piana omogenea che si propaga lungo l'asse z

allora nel piano  $z=0$   
 $V_r(x,y) = \sqrt{I_r} = \text{costante}$   
 e si avrebbe

$$V(x,y) \propto I_r + I_o(x,y) + \sqrt{I_r} U_o(x,y) + \sqrt{I_r} U_o^*(x,y)$$

• Interpretiamo con degli esempi il significato dei termini i-iv vediamo vari metodi con i quali è possibile estrarre il termine (ii)

→ ONDA PIANA OBLIQUA

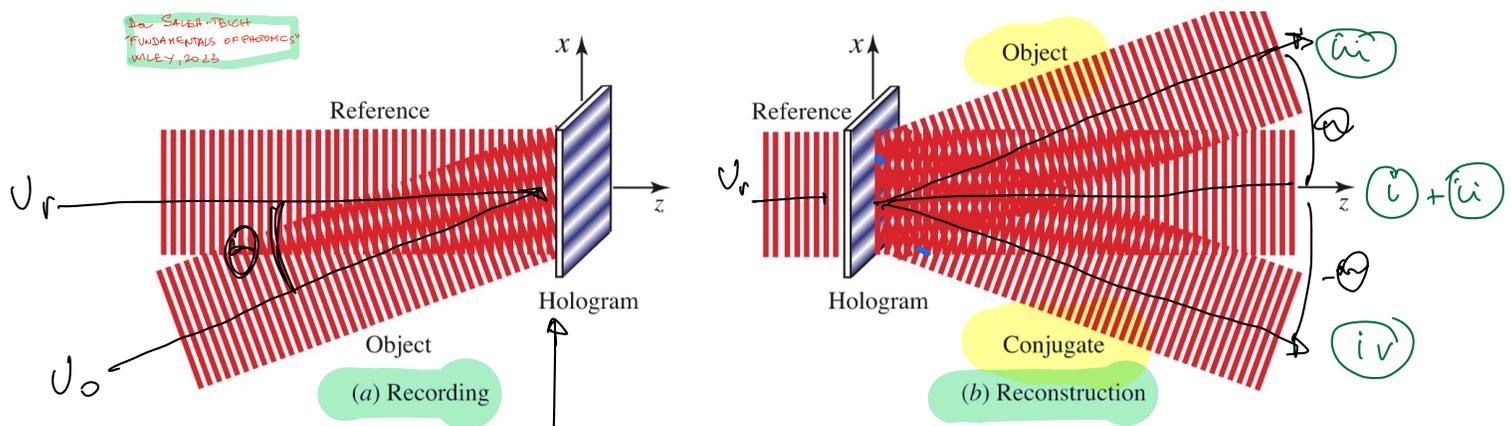


Figure 4.5-2 The hologram of an oblique plane wave is a sinusoidal diffraction grating.

$$V_o(x,y) = \sqrt{I_o} e^{-ikx \sin \theta}$$

Ricostruzione

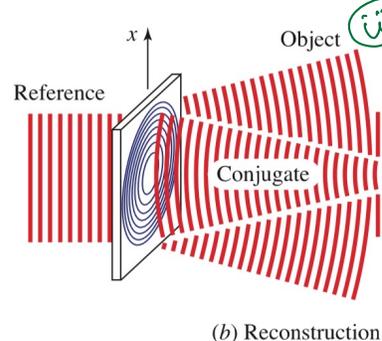
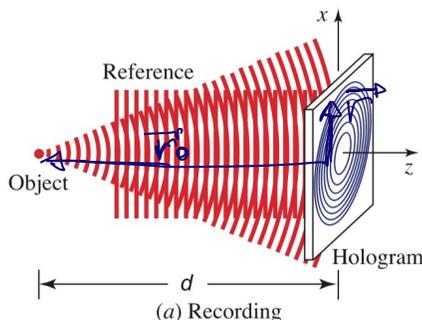
$$V(x,y) \propto \underbrace{I_r}_{(i)} + \underbrace{I_o}_{(ii)} + \underbrace{\sqrt{I_r I_o} e^{-ikx \sin \theta}}_{(iii)} + \underbrace{\sqrt{I_r I_o} e^{ikx \sin \theta}}_{(iv)}$$

In questo caso l'hologramma è equivalente ad un reticolo a diffrazione sinusoidale che divide in tre l'onda incidente

# LOGRAMMA DI UNA SORGENTE PUNTFORME

$U_0 =$  onda sferica che origina da  $\vec{r}_0 = (0, 0, -z)$   $\Rightarrow U_0(x, y) \propto \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

Da SAUNDERS "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023



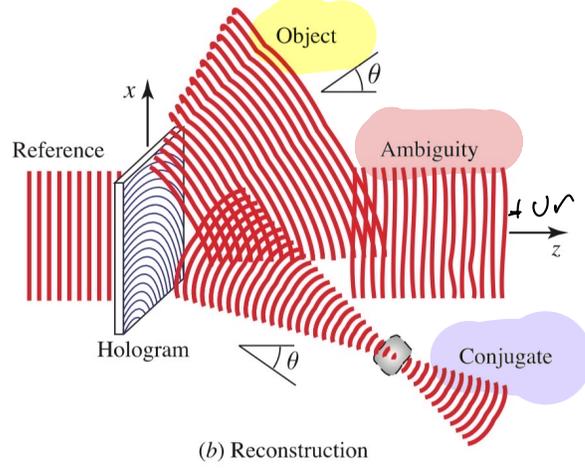
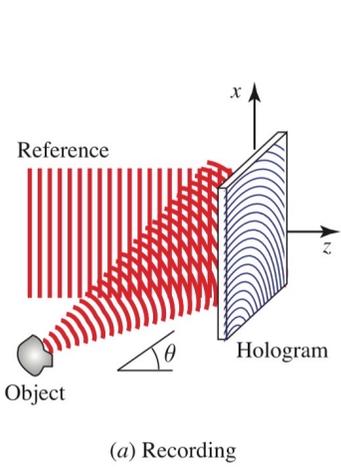
onda sferica con origine in  $(0, 0, -z)$   
 onda piana lungo  $z$   
 +  $i$   
 onda coniugata  $U_0^*(x, y) \propto \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

**Figure 4.5-3** Hologram of a spherical wave originating from a point source. The conjugate wave forms a real image of the point.

(ii) è un'onda  $\propto \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}$  che viaggia lungo  $z$  con piccola dispersione angolare perché le sue intensità variano lentamente nel piano trasverso

## LOGRAFIA FUORI ASSE

- Un metodo di separare le componenti dell'onda ricostruite è quello di fare in modo che vengano con frequenze spaziali ben differenti, in modo che si propaghino lungo direzioni ben separate nello spazio.
- Questa condizione si può ottenere facilmente se  $U_0$  e  $U_0^*$  arrivano da direzioni diverse



Da SAUNDERS "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023

**Figure 4.5-4** Hologram of an off-axis object wave. The object wave is separated from both the reference and conjugate waves.

$$U_0(x,y) = f(x,y) e^{-ikx \sin \theta}$$

L'eq. di ricostruzione di

$$U(x,y) \propto \text{Ir} + |f(x,y)|^2 + \Rightarrow \text{"AMBIGUITA"}$$

$$\text{copie dell'onda oggetto reale di } \sqrt{\text{Ir}} \text{ che arriva dalla direzione } \theta + \sqrt{\text{Ir}} f(x,y) e^{-ikx \sin \theta}$$

$$+ \sqrt{\text{Ir}} f^*(x,y) e^{ikx \sin \theta}$$

→ onde coniugate che si propagano nella direzione  $-\theta$

$f(x,y)$  viene lentamente, in modo che la sua massima frequenza spaziale  $\lambda_s$  corrisponda a

$$\theta_s = \arcsin \lambda_s \leq \theta$$

→ L'onda oggetto ha direzioni centrate attorno all'angolo  $\theta$

→ l'ambiguità corrisponde ad un'onda piana non omogenea con direzioni entro un cono di apertura  $2\theta_s$  intorno all'asse  $z$

→ Se  $\theta > \theta_s$  allora onda oggetto e onda coniugata sono ben separate tra loro e dalle altre due

→ Alternativamente si può porre  $\text{Ir} \gg \text{Io}$ , ne segue che l'ambiguità è molto poco intensa rispetto agli altri termini poiché contiene solo l'onda oggetto.

## APPARATO OLOGRAFICO

- la luce usata deve essere coerente, in modo da non avere fluttuazioni casuali della fase che distruggerebbero l'ologramma.
- Si usa normalmente un laser con una sufficiente "lunghezza di coerenza"
- Si cerca di mantenere più corta possibile la differenza di cammino ottico tra fascio oggetto e fascio di riferimento.
- Se l'angolo tra il fascio oggetto e quello di riferimento è  $\theta$ , allora l'ologramma viene fatto di linee separate da una distanza dell'ordine di  $\lambda / \sin \theta \Rightarrow$  il rivelatore usato per registrare l'ologramma deve avere una risoluzione spaziale migliore di  $\lambda / \sin \theta$ .