

- la polarizzazione della luce \vec{E} è data dal percorso seguito dal vettore elettrico (reale) $\vec{E}(\vec{r}, t)$ in funzione del tempo -
- Nei casi ordinari (incluso il vuoto) $\vec{E}(\vec{r}, t)$ giace in un piano tangente al fronte d'onda in quella posizione e ortogonale alla direzione di propagazione -
- Se consideriamo luce monocromatica, le componenti cartesiane del vettore complesso $\vec{E}(\vec{r})$ variano sinusoidalmente nel tempo con ampiezze e fasi in generale differenti, per cui la punta di $\vec{E}(\vec{r})$ traccia un'ellisse

Da SAUER-BEICH
FUNDAMENTALS OF PHOTONICS
WILEY, 2023

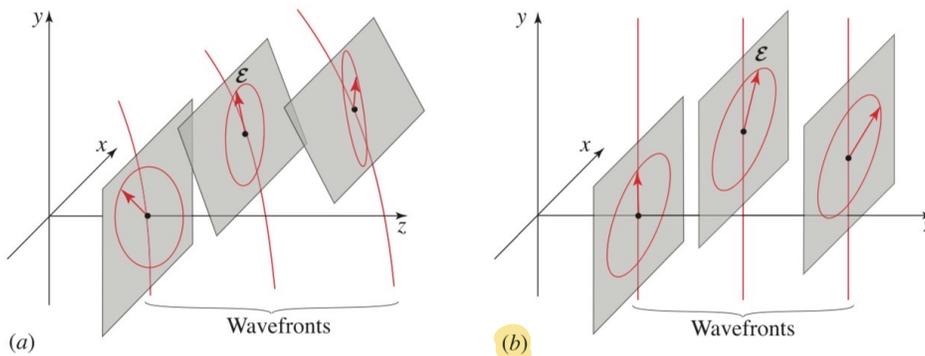


Figure 6.0-1 Trace of the time course of the electric-field vector endpoint for monochromatic light at several positions. (a) Arbitrary wave. (b) Plane or paraxial wave traveling in the z direction.

Per l'onda piana gli ellissi di polarizzazione sono sempre gli stessi per cui essa è descritta da un singolo ellisse e si dice polarizzata ellitticamente.

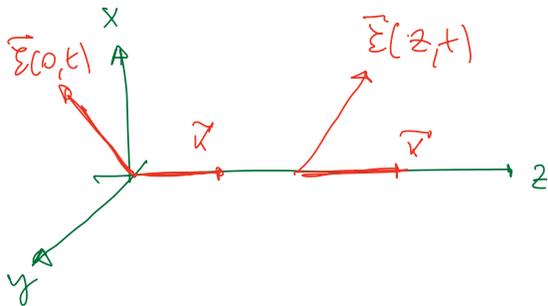
- L'ellisse di polarizzazione può
 - essere un cerchio \rightarrow polarizzazione circolare
 - essere una retta \rightarrow polarizzazione lineare (ellisse degenere)

\rightarrow In genere le onde parassiali si possono approssimare con onde piane descritte da un ellisse di polarizzazione

Principali

→ Fenomeni in cui la polarizzazione è importante

- riflessione e rifrazione alla frontiera tra due mezzi
- assorbimento della luce in alcuni materiali
- diffusione della luce
- birifrangenza → l'indice di rifrazione dei materiali anisotropi dipende dalla polarizzazione
- attività ottica → il piano di polarizzazione di luce polarizzata linearmente ruota al passaggio attraverso alcuni materiali "attivi" oppure soggetti ad un campo magnetico longitudinale.



$$\vec{E}(z,t) = \text{Re} \left\{ \vec{A} e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} \right\}$$

onde piane monocromatiche che si propagano lungo z

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} \quad A_x, A_y \in \mathbb{C}$$

sviluppo complesso

→ Per descrivere la polarizzazione dell'onda facciamo la "parte" del vettore $\vec{E}(z,t)$ in ciascuna posizione z in funzione del tempo.

– Scriviamo $A_x = a_x e^{i\varphi_x} \quad A_y = a_y e^{i\varphi_y}$ segue

$$\vec{E}(z,t) = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} = a_x \cos[\omega(t - \frac{z}{c}) + \varphi_x] \hat{x} + a_y \cos[\omega(t - \frac{z}{c}) + \varphi_y] \hat{y}$$

dove $E_x = a_x \cos[\omega(t - \frac{z}{c}) + \varphi_x]$

$E_y = a_y \cos[\omega(t - \frac{z}{c}) + \varphi_y]$

Equazione parametrica di un'ellisse

Dalle due equazioni sopra si può ricavare l'equazione cartesiana dell'ellisse

$$\frac{E_x^2}{a_x^2} + \frac{E_y^2}{a_y^2} - 2 \cos \varphi \frac{E_x E_y}{a_x a_y} = \sin^2 \varphi$$

dove $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$

Per z fisso la punta del vettore elettrico descrive l'ellisse di cui sopra nel piano $x-y$

DA SALET-BICH
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"
WILEY, 2023

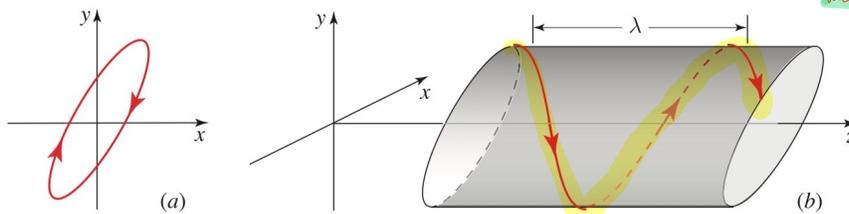
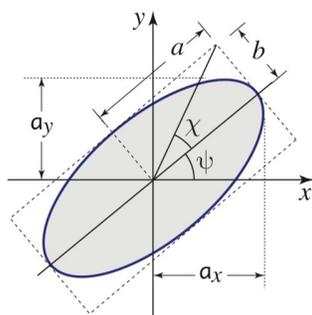


Figure 6.1-1 (a) Rotation of the endpoint of the electric-field vector in the $x-y$ plane at a fixed position z . (b) Trajectory of the endpoint of the electric-field vector as the wave advances.

L'ellisse di polarizzazione è caratterizzata dai due angoli:

$\psi \rightarrow$ rotazione o direzione del semiasse maggiore

$\chi \rightarrow$ ellipticità



DA SALET-BICH
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"
WILEY, 2023

$$\tan 2\psi = \frac{2R}{1-R^2} \cos \varphi, \quad R = \frac{a_y}{a_x}, \quad (6.1-6)$$

$$\sin 2\chi = \frac{2R}{1+R^2} \sin \varphi, \quad \varphi = \varphi_y - \varphi_x. \quad (6.1-7)$$

Figure 6.1-2
Polarization ellipse.

- Le relazioni qui sopra ci ottengono cercando l'angolo ψ che corrisponde ad una trasformazione delle coordinate E_x ed E_y tale che ci annulla il termine misto nell'equazione dell'ellisse.
- L'intensità dell'onda è proporzionale a $|A_x|^2 + |A_y|^2 = a_x^2 + a_y^2$ e quindi determina le dimensioni dell'ellisse.

POLARIZZAZIONE LINEARE (o "PLANARE")

- due delle due componenti $\vec{e} = 0$
Esempio: se $a_x = 0$ allora l'onda è linearmente polarizzata nella direzione y

- la differenza di fase \vec{e} $\varphi = 0$ o $\varphi = \pi$
 \Rightarrow l'equazione \odot di altre, se $\varphi = 0$

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{a_x a_y} = 0 \Rightarrow \left(\frac{E_x}{a_x} - \frac{E_y}{a_y}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{E_x}{a_x} = \frac{E_y}{a_y} \Rightarrow E_y = \frac{a_y}{a_x} E_x \Rightarrow \text{retta passante per l'origine}$$

$$\text{Se } \varphi = \pi \text{ vale } E_y = -\frac{a_y}{a_x} E_x$$

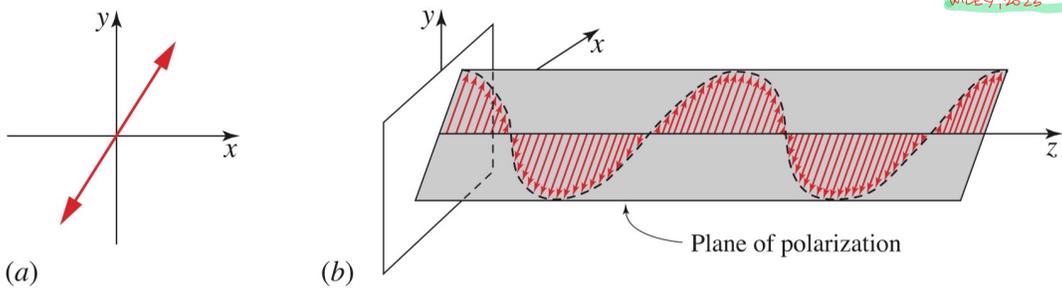


Figure 6.1-3 Linearly polarized light (also called plane polarized light). (a) Time course of the field at a fixed position z . (b) Endpoint of the electric-field vector at position z at a fixed time t .

POLARIZZAZIONE CIRCOLARE

Se $\varphi = \pm \pi/2$ e $a_x = a_y = a_0$ vale, ricordando che $\varphi = \varphi_y - \varphi_x = \pm \pi/2$

$$E_x = a_x \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_x\right] = a_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_x\right] = a_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_x\right]$$

$$E_y = a_y \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_y\right] = a_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_x + \varphi\right] = \mp a_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_x\right]$$

Da cui segue $E_x^2 + E_y^2 = a_0^2$ che è l'equazione di un cerchio

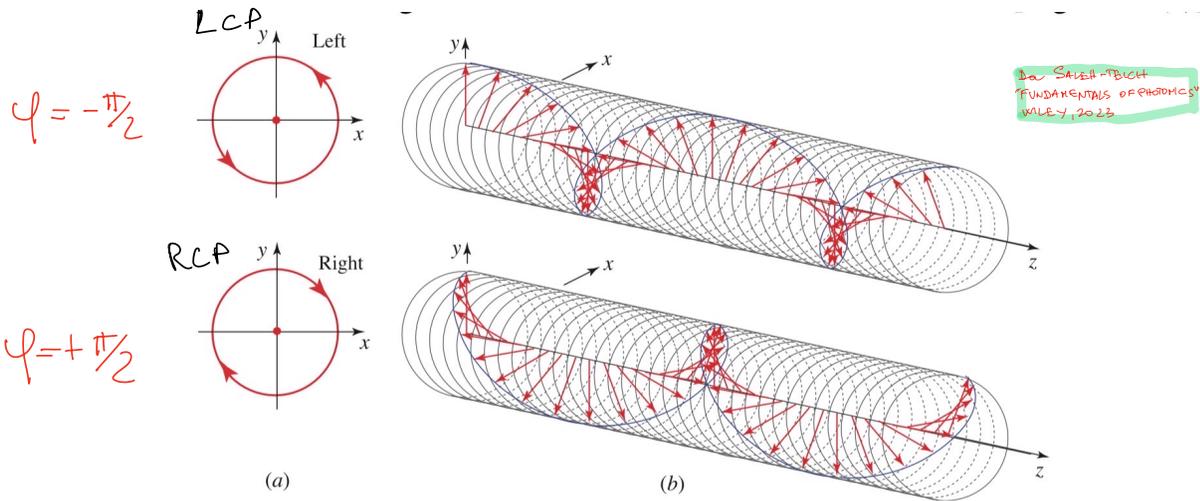


Figure 6.1-4 Motion of the endpoints of the electric-field vectors for left and right circularly polarized plane waves. (a) Time course at a fixed position z . (b) Trajectories of the endpoints.

SFERA DI POINCARÉ E PARAMETRI DI STOKES

Per quanto appena visto, si può dire che lo stato di polarizzazione di un'onda è descritto dai due parametri

$$R = \frac{a_y}{a_x} \quad \left. \vphantom{\frac{a_y}{a_x}} \right\} \rightarrow R e^{i\varphi} \quad \text{si dice rapporto complesso di polarizzazione}$$

$$\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

In alternativa si possono usare i due angoli $\varphi \rightarrow$ rotazione del semiasse maggiore
 $\chi \rightarrow$ ellipticità

La sfera di Poincaré è una sfera di raggio unitario i cui punti, di coordinate $\theta = 90^\circ - 2\chi$ e $\phi = 2\varphi$ rappresentano i possibili stati di polarizzazione

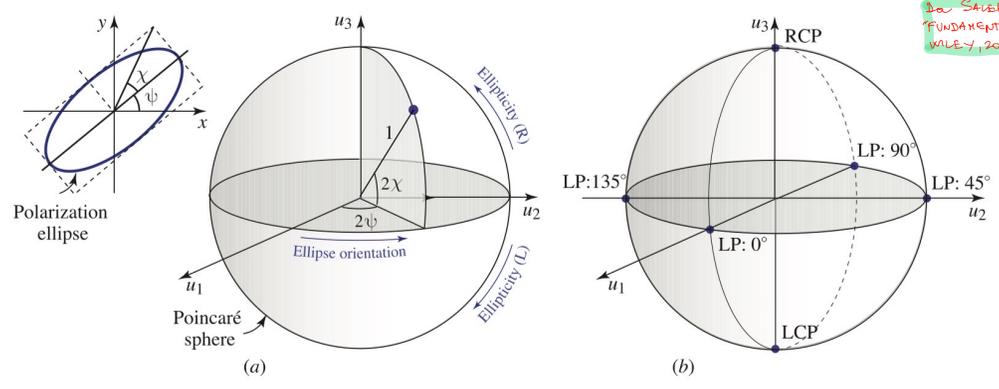


Figure 6.1-5 (a) The orientation and ellipticity of the polarization ellipse are represented geometrically as a point on the surface of the Poincaré sphere. (b) Points on the Poincaré sphere representing linearly polarized (LP) light at various angles with the x direction, as well as right-circularly polarized (RCP) and left-circularly polarized (LCP) light. Points in the interior of the sphere represent partially polarized light (the point at the origin of the sphere represents unpolarized light), as illustrated in Fig. 12.4-1.

La sfera di Poincaré, tuttavia, non dà informazioni sull'intensità dell'onda. Per ovviare a questo vi può essere il **rettore di Stokes** che ha come componenti un set di 4 numeri reali (S_0, S_1, S_2, S_3)

$S_0 = e_x^2 + e_y^2$ è proporzionale all'intensità, mentre S_1, S_2 ed S_3 sono le coordinate cartesiane del punto sulla sfera di Poincaré moltiplicate per S_0 ,

quindi

$$\begin{aligned} S_0 &= e_x^2 + e_y^2 \\ S_1 &= S_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \\ S_2 &= S_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \\ S_3 &= S_0 \sin 2\chi \end{aligned}$$

Si può anche vedere che

$$\begin{aligned} S_0 &= e_x^2 + e_y^2 = |A_x|^2 + |A_y|^2 \\ S_1 &= e_x^2 - e_y^2 = |A_x|^2 - |A_y|^2 \\ S_2 &= 2e_x e_y \cos \varphi = 2 \operatorname{Re} \{A_x^* A_y\} \\ S_3 &= 2e_x e_y \sin \varphi = 2 \operatorname{Im} \{A_x^* A_y\} \end{aligned}$$

PARAMETRI DI STOKES

Nota che

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_0^2$$

RAPPRESENTAZIONE MATRICIALE DELLO STATO DI POLARIZZAZIONE

Si parte dall'inviluppo complesso di un'onda monocromatica piana che si propaga lungo l'asse z

$$\begin{aligned} A_x &= a_x e^{i\varphi_x} \\ A_y &= a_y e^{i\varphi_y} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{caratterizzano completamente} \\ \text{l'onda} \end{array}$$

Con essi forniamo il vettore di Jones $\vec{J} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$

Dato il vettore di Jones si trova l'intensità dell'onda

$$I = \frac{1}{2} (|A_x|^2 + |A_y|^2) \frac{E_0^2}{\mu} \quad \left(\frac{1}{\mu} \text{ è detta "impedenza" del mezzo} \right)$$

e si ricavano poi $R = \frac{a_y}{a_x} = \frac{|A_y|}{|A_x|}$ e $\varphi = \varphi_y - \varphi_x = \arg\{A_y\} - \arg\{A_x\}$

che permettono di definire lo stato di polarizzazione -

Table 6.1-1 Jones vectors of linearly polarized (LP) and right- and left-circularly polarized (RCP, LCP) light.

LP in x direction	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$		LP at angle θ	$\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$	
RCP	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$		LCP	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$	

Per un'onda normalizzata $|A_x|^2 + |A_y|^2 = 1$

See SALEM & BUCH
FUNDAMENTALS OF PHOTONICS
WILEY, 2023

POLARIZZAZIONI ORTOGONALI

Due stati di polarizzazione \vec{J}_1 e \vec{J}_2 sono detti "ortogonali" se il loro prodotto scalare è nullo:

$$(\vec{J}_1, \vec{J}_2) = A_{1x} A_{2x}^* + A_{1y} A_{2y}^*$$

Ad esempio $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono ortogonali
LP_x LP_y

Infatti $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

Quindi LCP e RCP sono ortogonali, infatti, e parte
infatti $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$
 $1 + i \cdot i = 0$

Un vettore di Jones qualsiasi si può sempre scrivere
come la combinazione lineare di due vettori di
Jones ortogonali che formano la base della
rappresentazione

$$\vec{J} = \alpha_1 \vec{J}_1 + \alpha_2 \vec{J}_2 \quad \text{con } (\vec{J}_1, \vec{J}_2) = 0$$

Se inoltre la base è normalizzata, cioè $(\vec{J}_1, \vec{J}_1) = 1$
e $(\vec{J}_2, \vec{J}_2) = 1$

risulta che $\alpha_1 = (\vec{J}, \vec{J}_1)$ e $\alpha_2 = (\vec{J}, \vec{J}_2)$

Esempio

Vettore di Jones $\vec{J} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$ con $|A_x|^2 + |A_y|^2 = 1$

• Nella base $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ delle polarizzazioni lineari
LP_x LP_y

lungo x e lungo y rispettivamente, $\alpha_1 = A_x$
 $\alpha_2 = A_y$

• Nella base $\vec{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (lineare rotato di 45° rispetto all'asse x)

$\vec{J}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (lineare rotato di 135° rispetto all'asse x)

risulta

$$\alpha_1 = A_{45} = (\vec{J}, \vec{J}_1) = \frac{A_x + A_y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x + A_y) \quad e$$

$$\alpha_2 = A_{135} = (\vec{J}, \vec{J}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_y - A_x)$$

• Nella base delle polarizzazioni circolari

$$\vec{J}_1 = \text{RCP} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{J}_2 = \text{LCP} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

o'ha

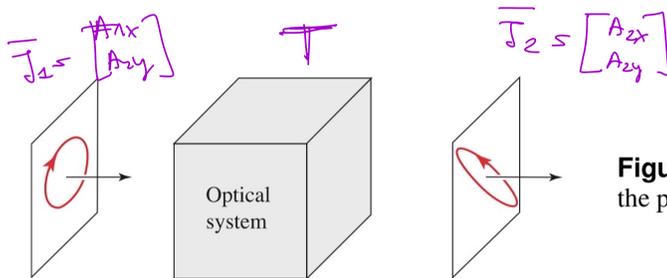
$$A_R \langle \vec{J}_1, \vec{J}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x - iA_y) \quad A_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x + iA_y)$$

→ Prendiamo un'onda linearmente polarizzata ad un angolo θ rispetto all'asse x , allora $A_x = \cos \theta$ e $A_y = \sin \theta$

$$\text{Segue } A_R = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta} \quad \text{e} \quad A_L = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}$$

cioè un'onda linearmente polarizzata è una sovrapposizione pesante di onde polarizzate circolarmente destre e sinistre

MATRICI DI JONES



Dr. SADEH EBELI
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"
WILEY, 2022

Figure 6.1-6 An optical system that alters the polarization of a plane wave.

Il sistema ottico lineare di figura che mantiene il carattere piano dell'onda, ma altera lo stato di polarizzazione e quindi il vettore di Jones è descritto da una matrice, detta matrice di Jones

$$\begin{bmatrix} A_{2x} \\ A_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1x} \\ A_{1y} \end{bmatrix}$$

matrice di Jones

ovviamente

$$\vec{J}_2 = T \vec{J}_1$$

La matrice T descrive il sistema ottico

ESempi di Matrici di Jones

$$T_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Polarizzatore lineare nella direzione } x$$

da SALET+BICH
FUNDAMENTALS OF PHOTONICS
WILEY, 2023

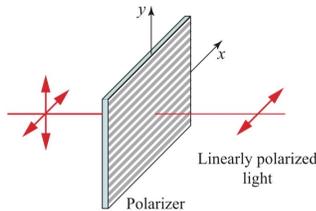


Figure 6.1-7 The linear polarizer. The lines in the polarizer represent the field direction that is permitted to pass.

$$T_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma} \end{bmatrix}$$

↑
asse "veloce"

↑
asse "lento"

lamina ritardante con
asse veloce lungo la
direzione x -
Ritarda la componente y
di una fase Γ rispetto a
quella x

Se $\Gamma = \frac{\pi}{2}$

$$T_{\lambda/4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

→ lamina quarto d'onda
o QWP

converti $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
LP LCP

e $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
RCP

Se $\Gamma = \pi$

$$T_{\lambda/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

→ lamina mezza onda
o HWP

converti $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$
LP +P
rotato di 90°

converti $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$
RCP LCP

Dr. SURESH K. RAO
 FUNDAMENTALS OF PHOTONICS
 WILEY, 2023

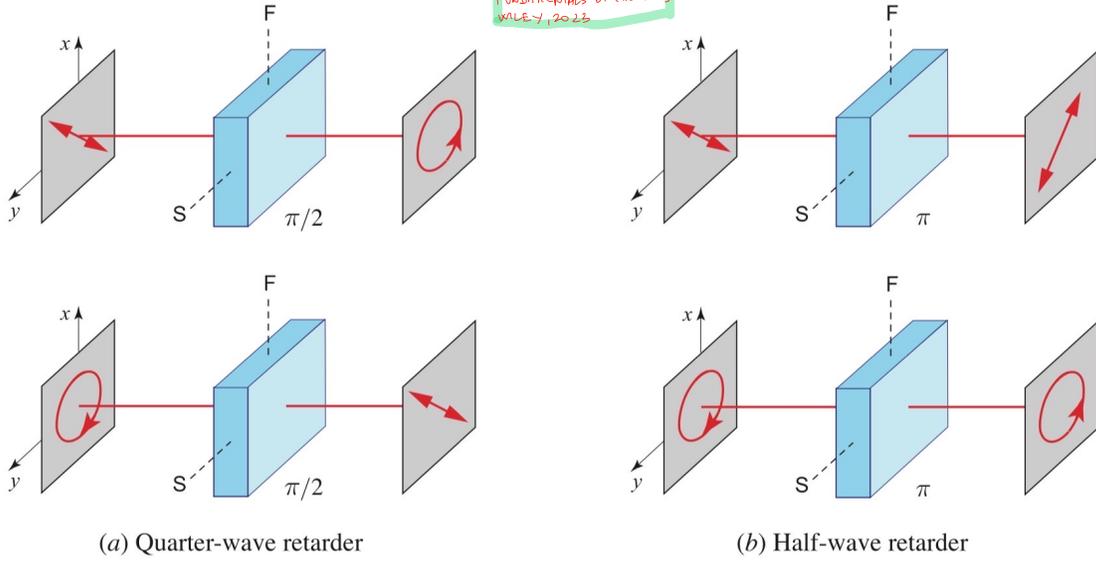


Figure 6.1-8 Operations of quarter-wave ($\pi/2$) and half-wave (π) retarders on several particular states of polarization are shown in (a) and (b), respectively. F and S represent the fast and slow axes of the retarder, respectively.

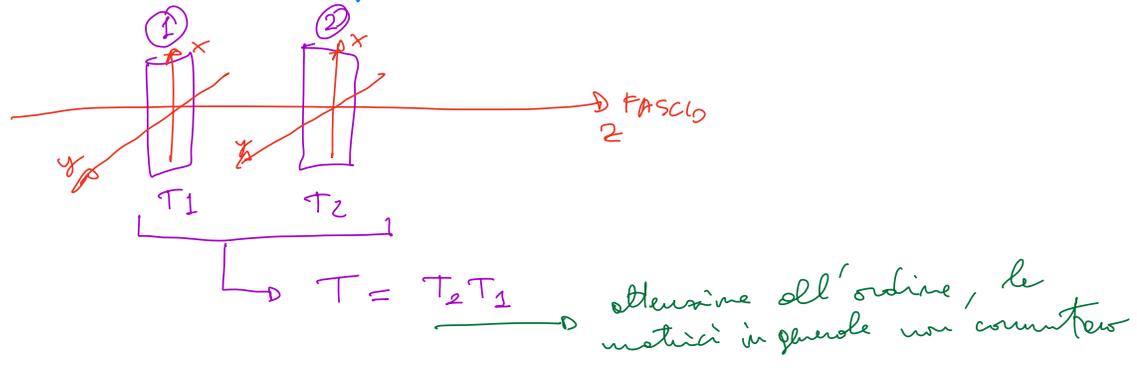
• Esistono poi gli elementi rotatori che ruotano il piano di polarizzazione di un'angolo dato

$$T_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \rightarrow \text{comute } \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

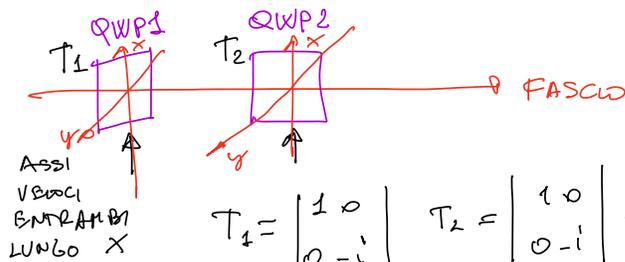
Dove $\theta_2 = \theta_1 + \theta$

ELEMENTI POLARIZZANTI IN CASCATI

L'azione di elementi polarizzanti disposti in cascata è descritta dalla moltiplicazione delle matrici corrispondenti:



Esempio



$$T_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} \quad T_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} \Rightarrow T = \begin{vmatrix} T_2 & T_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \text{HWP}$$

Due lamine $\lambda/4$ in contatto con cui veloci paralleli sono equivalenti ad una $\lambda/2$

Assi veloci ortogonali

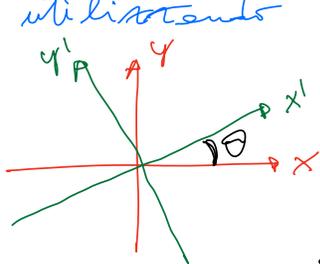


$$T_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} \quad T_2 = \begin{vmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow T = \begin{vmatrix} T_2 & T_1 \\ -i & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix}$$

$$= -i \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{fase entrambe componenti di } \pi/2 \Rightarrow \text{nessun effetto}$$

TRASFORMAZIONI DI COORDINATE

- Gli elementi delle matrici di Jones dipendono dalla scelta del sistema di coordinate.
- Se gli elementi in questione sono noti in un dato sistema di coordinate, si possono trovare in un altro sistema utilizzando metodi matriciali.



→ Trasformazione dei vettori di Jones

$$\vec{J}' = R(\theta) \vec{J} \quad \text{dove } R(\theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

→ Trasformazione delle matrici di Jones

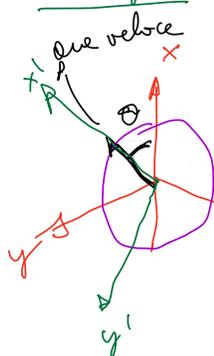
$$T' = R(\theta) T R(-\theta) \quad \text{dove } R(-\theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$T = R(-\theta) T' R(\theta) \quad \text{e } R(-\theta) R(\theta) = \text{identità}$$

Infatti se $J_2 = T J_1$ allora $J_2' = R(\theta) T J_1$,

ma $J_1 = R(-\theta) J_1'$, per cui $J_2' = R(\theta) T R(-\theta) J_1' = T' J_1'$

Esempio



Supponiamo di avere una lamina J_2 con l'asse veloce che ad un angolo θ rispetto all'asse x .

La lamina è descritta dalla matrice

$$T' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ nel sistema } (x', y')$$

rotato di θ rispetto al sistema (x, y)

$$\text{In questo caso } R(\theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

→ la matrice di Jones della lamina J_2 nel sistema (x, y) è data da

$$\begin{aligned} T &= R(-\theta) T' R(\theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Se la applichiamo ad un setto di Jones che rappresenta un onda polarizzata linearmente, ad esempio lungo x , otteniamo

$$J_2 = T J_1 = \begin{vmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{vmatrix} \rightarrow J_2 \text{ è polarizzato linearmente con il piano di polarizzazione per un angolo } 2\theta \text{ all'asse } x$$

MODI NORMALI

- I modi normali di un sistema polarizzante sono quegli stati di polarizzazione che non cambiano dopo la trasmissione attraverso il sistema.
- I vettori di Jones dei modi normali di un sistema caratterizzati dalla matrice di Jones T sono tali che $T\vec{J} = \mu\vec{J}$, dove μ è una costante.

- Dato che la matrice T è 2×2 , esistono solo due modi normali indipendenti tali che

$$T\vec{J}_1 = \mu_1\vec{J}_1 \quad \text{e} \quad T\vec{J}_2 = \mu_2\vec{J}_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{autovett} \\ \text{Autovalore} \end{array} \right.$$

- Se la matrice T è Hermitiana ($T_{12} = T_{21}^*$) allora i modi normali sono ortogonali

$$(\vec{J}_1, \vec{J}_2) = A_{1x}A_{2x}^* + A_{1y}A_{2y}^* = 0$$

- I modi normali di un sistema di solito si usano come base per esprimere i vettori di Jones, in modo che, dato un vettore arbitrario \vec{J} , si ha $\vec{J} = d_1\vec{J}_1 + d_2\vec{J}_2$

$$\text{Segue che } T\vec{J} = T(d_1\vec{J}_1 + d_2\vec{J}_2) = d_1\mu_1\vec{J}_1 + d_2\mu_2\vec{J}_2$$

RIFLESSIONE E RIFRAZIONE

- Ripercorriamo il fenomeno delle riflessioni e rifrazioni all'interfaccia tra due mezzi utilizzando il formalismo delle matrici di Jones.

• Notazione

- ① onde incidenti
- ② onde riflesse
- ③ onde trasmesse

- Diciamo per convenienza, grazie all'esistenza delle condizioni al contorno per l'interfaccia

$$\theta_1 = \theta_3 \quad \text{legge delle riflessioni}$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \text{legge di Snell}$$

da SAHEB-TBIKH
 FUNDAMENTALS OF PHOTONICS
 WILEY, 2023

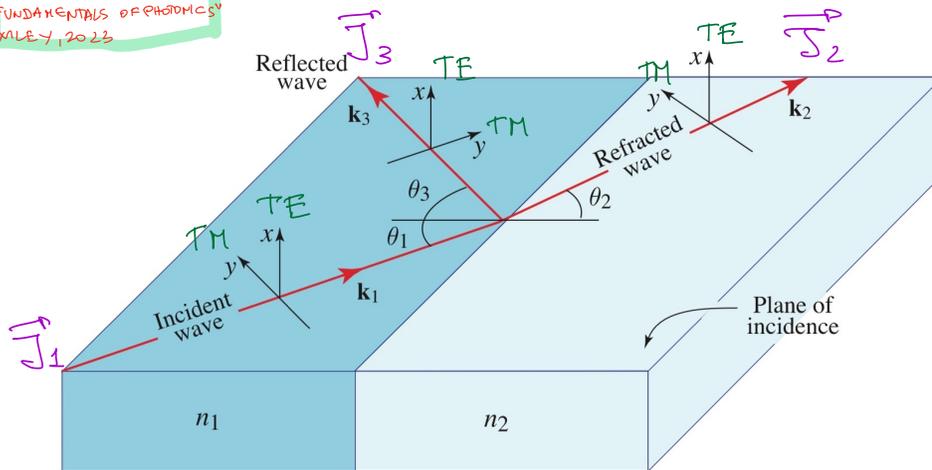


Figure 6.2-1 Reflection and refraction at the boundary between two dielectric media.

Le onde ① incidente, ② rifratta e ③ riflessa sono descritte dai vettori di Jones

$$\vec{J}_1 = \begin{bmatrix} A_{1x} \\ A_{1y} \end{bmatrix} \quad \vec{J}_2 = \begin{bmatrix} A_{2x} \\ A_{2y} \end{bmatrix} \quad \vec{J}_3 = \begin{bmatrix} A_{3x} \\ A_{3y} \end{bmatrix}$$

e sono connesse dalle matrici di Jones

$r \rightarrow$ riflessione e $t \rightarrow$ trasmissione

$$\vec{J}_3 = r \vec{J}_1 \quad e \quad \vec{J}_2 = t \vec{J}_1$$

I modi usuali di questo sistema sono le due polarizzazioni lineari lungo x e lungo y in figura

⊗ - Transverse Electric - polarizzazione - onda "S" - \perp ortogonale

⊙ - Transverse Magnetic - polarizzazione - onda "P" - \parallel parallela

Dato che i due modi usuali sono indipendenti le matrici di Jones sono diagonali

$$t = \begin{bmatrix} t_x & 0 \\ 0 & t_y \end{bmatrix} \quad r = \begin{bmatrix} r_x & 0 \\ 0 & r_y \end{bmatrix}$$

- Nel caso di mezzi non conduttori, non-magnetici e dielettrici, gli elementi di matrice sono dati dalle equazioni di Fresnel

$$r_x = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}$$

$$t_x = 1 + r_x$$

onde "S" o
polarizzazione TE

$$r_y = \frac{n_1 \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}$$

$$t_y = (1 + r_y) \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2}$$

onde "P" o
polarizzazione TM

- Se sono noti n_1, n_2 e θ_1 , i coefficienti r_x, r_y, t_x, t_y si determinano usando la legge di Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow \cos \theta_2 = \sqrt{1 - n_1^2 \sin^2 \theta_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1}$$

- la quantità $1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1$ può anche essere < 0

se $n_1 > n_2$ e quindi in generale i coefficienti sono $\in \mathbb{C}$

- Nello studio dell'andamento dei coefficienti occorre distinguere i due casi

$n_1 < n_2 \rightarrow$ riflessione esterna

$n_1 > n_2 \rightarrow$ riflessione interna

POLARIZZAZIONE TE - onde S

Fig. 6.2-2

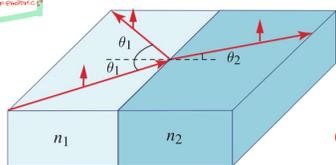
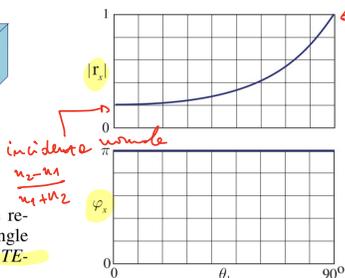


Figure 6.2-2 Magnitude and phase of the reflection coefficient as a function of the angle of incidence for external reflection of the TE-polarized wave ($n_2/n_1 = 1.5$).



RIFLESSIONE ESTERNA $n_1 < n_2$

$$r_x = |r_x| e^{i\varphi_r} = |r_x| e^{i\pi} = -|r_x|$$

sempre $\in \mathbb{R}$ e < 0

\Rightarrow l'onda "S" riflette \vec{e} sfasata di 180°

See Section 6.2
Magnitudes of electric
field, page 204

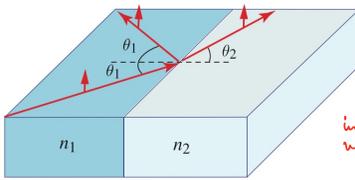
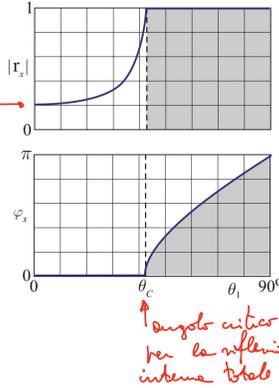


Figure 6.2-3 Magnitude and phase of the reflection coefficient as a function of the angle of incidence for internal reflection of the TE-polarized wave ($n_1/n_2 = 1.5$).



RIFLESSIONE INTERNA $n_1 > n_2$

Angolo critico θ_c per la riflessione interna totale

Si trova da

$$\cos \theta_c = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_c} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2 \theta_c}$$

imponendo $1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2 \theta_c \geq 0$ scegliendo il segno "+"

$$1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_c \Rightarrow \sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

- Per $\theta_1 > \theta_c$ il $\cos \theta_2$ è immaginario e l'onda \mathcal{E} viene riflessa totalmente
- A volte un'onda evanescente che si propaga lungo l'interfaccia e che garantisce il rispetto delle condizioni al contorno -

POLARIZZAZIONE TM - ONDA "P"

See Section 6.2
Magnitudes of electric
field, page 204

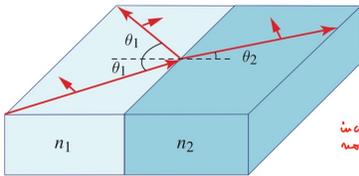
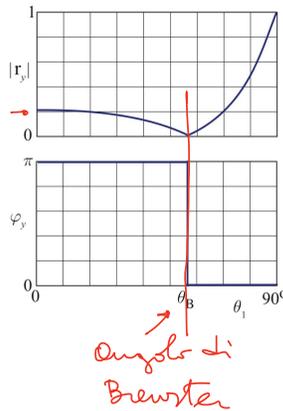


Figure 6.2-4 Magnitude and phase of the reflection coefficient as a function of the angle of incidence for external reflection of the TM-polarized wave ($n_2/n_1 = 1.5$).



- L'incidenza normale ($\theta_1 = 0^\circ$) $r_p = r_{TM} = r_p \neq 0$, cioè l'onda riflessa è spostata di 180°

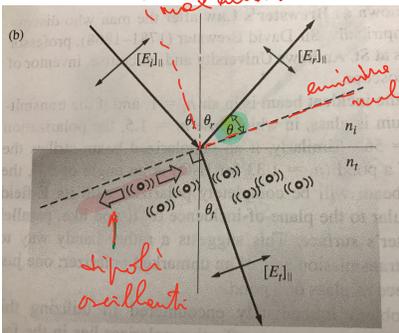
• Quando $\frac{n_1}{\cos \theta_1} = \frac{n_2}{\cos \theta_2}$ $r_p = 0$

- Questo avviene per un particolare angolo di incidenza detto angolo di Brewster e dato da

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

- Se l'onda incidente è "P" (TM) allora non c'è onda riflessa

GIUSTIFICAZIONE DELL'ANGOLO DI BREWSTER



- L'onda incidente polarizzata "P" eccita i dipoli nel mezzo n_2 che oscillano lungo la direzione del campo elettrico riflesso
- Se l'angolo θ in figura è piccolo, l'ampiezza del campo riflesso, che è dovuto ai dipoli oscillanti, è piccola -
- Se $\theta = 0$ l'ampiezza del campo riflesso è nulla - Questo avviene per $\theta_i + \theta_t = 90^\circ$

la condizione per cui $E_{\text{riflessa}} = 0$ è sempre $\theta_i + \theta_r = 90^\circ$
 Quindi sempre $\theta_B + \theta_2 = 90^\circ$

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \sin (90^\circ - \theta_B) = n_2 \cos \theta_B$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

SAE+BIOT
 FUNDAMENTALS OF PHOTONICS
 WILEY, 2012

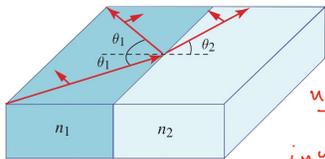
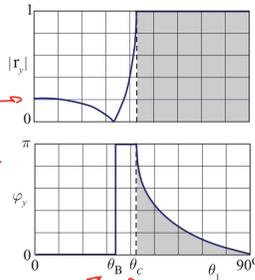


Figure 6.2-5 Magnitude and phase of the reflection coefficient as a function of the angle of incidence for internal reflection of the TM-polarized wave ($n_1/n_2 = 1.5$).



$n_1 = n_2$
 $n_1 > n_2$
 incidenza normale

angolo di Brewster
 $\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$

angolo critico
 $\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$

RIFLESSIONE INTERNA $n_1 > n_2$

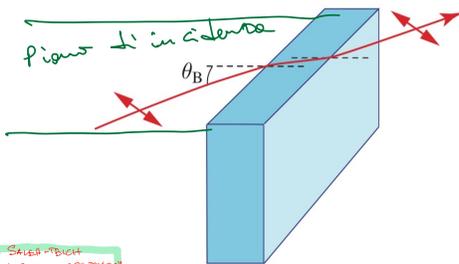
• Abbiamo visto l'angolo di Brewster

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

• e l'angolo critico:

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

- Notiamo infine che a incidenza normale il coefficiente di riflessione vale sempre $\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ indipendentemente da TE, TM, interna o esterna.



SAE+BIOT
 FUNDAMENTALS OF PHOTONICS
 WILEY, 2012

Figure 6.2-6 The Brewster window transmits TM-polarized light with no reflection loss.